Historia et Origo
CALCULI DIFFERENTIALIS
a
G. G. LEIBNITIO
conscripta.

Zur zweiten Säcularfeier des Leibnizischen Geburtstages
aus den
Handschriften der Königlichen Bibliothek
zu Hannover
herausgegeben von

Dr. C. I. GERHARDT.

HANNOVER.
Im Verlage der Hahn'schen Hofbuchhandlung.
1846.

C. I. Gerhardt Die Entdeckung der Differentialrechnung d
ibniz, mit Benützung der Leibnizischen Manuscripte ..., dargestellt. Ha
1848. 4to. 65 S. H. W. Schmidt's Verlagsbuchh. Anz. v. Stern Gött. G. A
St.

Leibniz, Gottfried Wilhelm, freiherr von, 1646-1716.

Historia et Origo

CALCULI DIFFERENTIALIS

a

G. G. LEIBNITIO

conscripta.

Zur zweiten Säcularfeier des Leibnizischen Geburtstages
aus den
Handschriften der Königlichen Bibliothek
zu Hannover
herausgegeben von

Dr. C. I. GERHARDT. Karl Immanuel, 1816-1899

Als Anhang sind zwei noch ungedruckte mathematische Abhandlungen Leibnizens hinzugefügt.

HANNOVER.
Im Verlage der Hahn'schen Hofbuchhandlung.
1846.

Schon vor der Bekanntmachung der Differentialrechnung durch Leibniz im Jahre 1684 waren Methoden vorhanden, durch welche man in gewissen Fällen dieselben Resultate erhielt, als die Differentialrechnung sie darbietet. Ihre Anwendung war jedoch sehr beschränkt und durch weitläufige Rechnungen erschwert. Deshalb ist nicht zu verwundern, dass die neue Methode, die in grösster Allgemeinheit auf jedes Problem anwendbar war, freudig begrüsst und begierig aufgenommen wurde. Konnte man sich auch nicht mit mathematischer Genauigkeit von der Sicherheit ihres Princips überzeugen, so liess sich wenigstens ihre Gültigkeit insofern rechtfertigen, als die mittelst der neuen Methode erhaltenen Resultate mit den auf unzweifelhafte Weise gewonnenen übereinstimmten. Während einige befangene Geister ihre Zweifel laut werden liessen, wussten Coryphäen unter den Mathematikern der damaligen Zeit das bequeme Verfahren so geschickt zu handhaben, dass in wenigen Jahrzehnten die mathematischen Wissenschaften eine durchgreifende Umgestaltung erfuhren.

Es konnte nicht fehlen, dass der glückliche Erfinder der neuen Methode überall gefeiert wurde, wohin nur Kenntniss derselben drang, zumal da er höchst bereitwillig Auskunft gab über die Anwendung in zweifelhaften Fällen und es an Berichtigungen und Winken nicht fehlen liess. So wurde Leibniz der Mittelpunkt, um welchen sich die Mathematiker des Con-

†

tinents von Europa gruppirten. Sogar in England, dem Vaterlande der Fluxionen, sehen wir die Differentialrechnung sehr bald nach ihrer Bekanntmachung verbreitet; der Schottländer Craige bediente sich ihrer schon 1685 in seiner Schrift: *Methodus figurarum lineis rectis et curvis comprehensarum quadraturas determinandi.*

Jedoch nicht lange sollte sich der grosse Mann des Ruhms, Erfinder der Differentialrechnung zu sein, ungestört erfreuen. Noch ehe das Jahrhundert zu Ende ging, das durch diese unsterbliche Entdeckung verherrlicht wurde, erhoben gekränkter Ehrgeiz und Nationaleifersucht die Waffen zum Angriff, um den Deutschen die Ehre streitig zu machen, dass von einem aus ihrer Mitte zuerst dieses neue Licht angezündet worden.

Das Problem der Brachystochrone*), das von Joh. Bernoulli im Jahre 1697 den Mathematikern zur Lösung vorgelegt wurde und die geheime Eifersucht zwischen dem berühmten Brüderpaar der Bernoullis zum unversöhnlichsten Hasse entflammte, gab auch, wenigstens mittelbar, die Veranlassung zu dem berüchtigten Streite über den ersten Erfinder der Differentialrechnung. Joh. Bernoulli hatte nämlich das erwähnte Problem an Leibniz geschickt, der die Lösung an demselben Tage, an welchem er es erhielt, zu Stande brachte. Er gab sogleich Joh. Bernoulli Nachricht davon und beide kamen überein, das Resultat geheim zu halten und die ursprünglich zur Lösung gegebene Frist von 6 Monaten zu verdoppeln, um den Geometern Zeit zu lassen, ihre Kräfte daran zu versuchen. In einem fliegenden Blatte wurde eine Bekanntmachung darüber von Joh. Bernoulli an alle namhaften Mathematiker gesandt. Der Termin war noch nicht abgelaufen, als der Marquis de l'Hospital, Jacob Bernoulli und Newton Auflösungen jenes Problems veröffentlichten. Leibniz

*) Diejenige Curve zu finden, dass ein Körper, der auf der concaven Seite derselben herabfällt, von einem Punkte zum andern in der kürzesten Zeit gelangt.

machte zugleich mit der seinigen die beiden ersten in den *Actis Erudit.* 1697 bekannt und erwähnte beiläufig, dass die Auflösungen von den Männern herrührten, von denen er vorausgesetzt habe, dass sie allein solches vermöchten. Während nun die Aufmerksamkeit der Geometer auf die grossen Probleme gerichtet war, die in dem Streite der Bernoullis hin und herflogen, erschien plötzlich von einem Genfer Mathematiker, Nicolas Fatio de Duillier, der seit längerer Zeit in London lebte, eine kleine Schrift unter dem Titel: *Lineae brevissimi descensus investigatio geometrica duplex, cui addita est investigatio geometrica solidi rotundi, in quod minima fiat resistentia, Londin.* 1699, in welcher der Verfasser sich nicht allein darüber höchst gereizt ausspricht, dass ihm Joh. Bernoulli keine Bekanntmachung des Problems der Brachystochrone zugeschickt und Leibniz ihn nicht unter denjenigen aufgezählt habe, von denen die Lösung dieses Problems allein zu erwarten gewesen, sondern auch gegen Ende der Schrift (p. 18.) bemerkt, dass er Newton für den ersten, Leibniz für den zweiten Erfinder der Differentialrechnung halte, falls nicht letzterer von jenem etwas entlehnt habe.*) Leibniz

*) Um die gespreizten Anmassungen Fatio's und die ganze Art und Weise des Angriffs näher zu charakterisiren, möge hier die Stelle folgen, wie sie im Original lautet: *Quaeret forsan Cl. Leibnitius, unde mihi cognitus sit iste Calculus* (Fluxionsrechnung) *quo utor? Ejus equidem Fundamenta universa, ac plerasque Regulas, proprio Marte, Anno* 1687, *circa Mensem Aprilem et sequentes, aliisque deinceps Annis, inveni; quo tempore neminem eo Calculi genere, praeter me ipsum, uti putabam. Nec mihi minus cognitus foret, si nondum natus esset Leibnitius. Aliis itaque glorietur Discipulis, me certe non potest. Quod plus satis patebit, si olim Litterae, quae inter Clarissimum Hugenium meque intercesserunt, publici juris fiant. Newtonum tamen primum, ac pluribus Annis vetustissimum, hujus Calculi inventorem, ipsa rerum evidentia coactus, agnosco: a quo utrum quicquam mutuatus sit Leibnitius, secundus ejus Inventor, malo eorum, quam meum sit Judicium, quibus visae fuerint Newtoni Litterae, aliique ejusdem Manuscripti Codices. Neque modestioris Newtoni Silentium, aut prona Leibnitii Sedulitas, Inventionem hujus Calculi sibi passim tribuentis ullis imponet, qui ea pertractaverint, quae ipse evolvi, Instrumenta. Jam*

und Joh. Bernoulli veröffentlichten Entgegnungen. Der erstere antwortete mit grosser Mässigung in den *Actis Erudit.* des Jahrs 1700, und bemerkte namentlich, dass Fatio gewiss ohne Wissen und Willen Newton's, dem er (Leibniz) stets die grösste Hochachtung bezeugt habe, zu solchen unhaltbaren Anschuldigungen fortgerissen worden sei. Die neuen Erwiederungen Fatio's wurden von den Herausgebern der *Acta Erudit.* nicht aufgenommen, um so dem Streite ein Ende zu machen. Aus Abschriften, die sich davon unter den Papieren Leibnizens finden, ergiebt sich einmal, dass Fatio wenigstens die Papiere Newton's, die dieser deshalb von Cambridge nach London kommen liess, eingesehen hatte, und zweitens, dass derselbe nur das Organ der englischen Mathematiker war, die darüber schel sahen, dass Leibniz als der alleinige Erfinder der Differentialrechnung genannt wurde, da doch ihr Landsmann Newton mehrere Jahre früher im Besitz derselben gewesen war. Unter solchen Umständen war zu erwarten, dass der unter der Asche glimmende Funke bei vorkommender Gelegenheit zur hellen Flamme wieder emporlodern werde.

Die *Acta Erudit.* des Jahrs 1705 enthielten eine Anzeige zweier Abhandlungen Newton's: *De quadratura curvarum* und *Enumeratio linearum tertii ordinis,* die als Anhang zu Newton's Optik im Jahre 1704 erschienen waren. Der Recensent, Leibniz selbst, wie später bekannt geworden ist, hatte sich darin folgender, etwas zweideutigen Worte bedient: *Pro differentiis*

---

vero, si meas ipsius Meditationes, aequiori Lance, inter se comparandi, mihi concedatur facultas; ne vel mille ejusmodi Problematum Solutiones, uni nostrae Theoriae Gravitatis, opponendas pronunciem. Quam equidem brevi publici juris facerem, quamvis chartulae meae, ante Annos novem conscriptae, jam non sint ad manus, si mihi propositum esset ulterius recognoscere, quo se jure SOLOS Mathematicos proclament Germani Geometrae. Certe Newtono, Summo Viro, primam Palmam, absque omni disputatione aut invidia, immenso fere intervallo, praeripiente; de secunda, in Physicis ac Mathematicis rebus, plures, quam arbitrentur, invenient, neque forsan iniquis usque adeo viribus, cum ipsis decertantes.

igitur Leibnitianis D. Newtonus adhibet, semperque adhibuit fluxiones, quae sunt quam proxime ut fluentium augmenta — iisque tum in suis Principiis Naturae Mathematicis, tum in aliis postea editis eleganter est usus, quemadmodum et Honoratus Fabri in sua Synopsi Geometrica motuum progressus Cavallerianae Methodo substituit. Die Engländer verstanden diese Worte so, als wenn Leibniz hätte sagen wollen, dass Newton für die Leibnizischen Differentiale Fluxionen gesetzt, so wie Fabri in seiner *Synopsis Geometrica* an die Stelle der Methode Cavaleri's die progressive Bewegung substituirte. Diesmal stellte sich Keill, Mitglied der Königlichen Societät, an die Spitze der Freunde Newton's, um Gleiches mit Gleichem zu vergelten. Es erschien von ihm ein Brief in den *Philosophical Transactions* des Jahres 1708, worin er behauptete, dass Newton ausser allem Zweifel der erste Erfinder der Fluxionen sei; Leibniz habe nur die Fluxionsrechnung mit veränderter Benennung und Bezeichnung als Differentialrechnung bekannt gemacht. Leibniz wurde also von Keill des Plagiats beschuldigt. Ueber diese harte Beschimpfung seines Namens beklagte er sich im Jahre 1711 mit gerechter Indignation bei der Königl. Societät zu London, vor deren Forum seiner Meinung nach die Sache jetzt gehörte, da Keill sowohl, als er Mitglieder derselben waren. Er forderte sie auf, Keill zum Widerruf jener Beschuldigung und zu einer öffentlichen Ehrenerklärung zu veranlassen. Der Letztere richtete in Folge dessen ein langes Schreiben an die Königl. Societät, worin er Leibniz als Gelehrtem alle Gerechtigkeit widerfahren lässt, aber hinzusetzt, dass nach seiner Ueberzeugung Newton der erste Erfinder der Differentialrechnung sei und dass Leibniz alle die Lobeserhebungen, mit denen er als Erfinder der neuen Rechnung überhäuft werde, nicht zukämen. Von diesem Schreiben wurde an Leibniz eine Abschrift geschickt. Noch in demselben Jahre 1711 beklagte dieser sich von neuem bei der Königl. Societät über Keill, der als ein *homo novus* mit den Vorgängen, um

welche es sich jetzt handle, unbekannt und im Unrecht sei, wenn er behaupte, dass der Streit durch jene oben angeführte Stelle in den *Actis Erudit.* hervorgerufen sei; es geschehe daselbst keiner Partei Unrecht. Am Schlusse seines Schreibens überlässt es Leibniz dem Urtheil der Königl. Societät, ob nicht die nichtigen und ungerechten Beschuldigungen Keill's zurückgewiesen werden müssten. So sah sich die Königl. Societät veranlasst, durch eine eigens dazu ernannte Commission die Sache gründlich untersuchen zu lassen. Der Bericht derselben, der damit schliesst, dass Leibniz von Keill nicht beleidigt worden sei, wurde von der Königl. Societät einstimmig genehmigt und zum Druck verordnet. Er erschien unter dem Titel: *Commercium epistolicum D. Joannis Collins et aliorum de analysi promota, jussu Societatis Regiae in lucem editum, Londin.* 1712, und enthält namentlich Briefe, die in den Jahren 1669 bis 1677 zwischen Barrow, Collins, Leibniz, Newton, Gregory durch Vermittelung des damaligen Secretärs der Akademie Oldenburg gewechselt worden waren. Leibniz befand sich zu Wien, als er die Nachricht von dem Erscheinen dieser Schrift erhielt. Entfernt von seinen Papieren und in diplomatische Geschäfte am Hofe des deutschen Kaisers verwickelt, sah er sich vor der Hand ausser Stande, eine vollständige Erwiederung zu veröffentlichen. Er schrieb deshalb an Joh. Bernoulli, und bat um sein Urtheil über diese Schrift. Derselbe antwortete, aus den Aktenstücken des *Commercium epistolicum* gehe hervor, dass keineswegs die Fluxionsrechnung früher als die Differentialrechnung entstanden wäre; es sei vielmehr anzunehmen, dass jene erst nach dem Erscheinen der letzteren von Newton ihre analytische Gestalt erhalten habe. Newton selbst habe beim Erscheinen der *Principia* noch nicht die wahren Werthe der höheren Fluxionen gekannt*). Diese Ant-

*) Seite 263 der ersten Ausgabe der *Principia* setzt nämlich Newton die Werthe der höhern Fluxionen von x^n gleich den auf einander fol-

wort wurde im Auszuge, als Gutachten eines *primarii Mathematici* über das *Commercium epistolicum*, einem fliegenden Blatte einverleibt und mit Bemerkungen begleitet, in welchen der anonyme Herausgeber die Behauptungen Joh. Bernoulli's in Schutz nahm. Diese Flugschrift erregte das grösste Aufsehen und erbitterte die Engländer, namentlich auch Newton, aufs höchste. Von jetzt an nahm die Controverse einen sehr gehässigen Charakter an, der Streit wurde ein persönlicher zwischen Leibniz und Newton. Da unternahm es der Sprachforscher Chamberlayne, die beiden grossen Männer zu versöhnen. In den Briefen, die Leibniz noch von Wien aus an denselben richtete, versprach er nach seiner Rückkehr nach Hannover ein anderes *Commercium epistolicum* dem von der Londoner Societät herausgegebenen entgegenzustellen, das unparteiische Aufschlüsse über die streitigen Punkte geben sollte. Aber ehe er noch Wien verliess, traten zwei für sein Verhältniss zum hannoverschen Hofe wichtige Ereignisse ein; seine hohe Gönnerin, die alte Churfürstin Sophie, starb, und bald darauf bestieg, nach dem Ableben der Königin Anna von England, der bisherige Churfüst von Hannover den Thron von

---

genden Gliedern der Reihe, die sich durch Entwicklung von $(x+o)^n$ ergiebt. Joh. Bernoulli rügt diesen Fehler in einem Briefe an Leibniz (*commerc. epist. Leibn. et Joh. Bernoull. Tom. II. p.* 294.) und zeigt in einem spätern Briefe (p. 310.), dass Newton in diesem Irrthum bis zum Jahre 1711 geblieben sei, denn um diese Zeit habe sein Neffe, Nicolaus Bernoulli, eine Reise durch England gemacht und von Newton ein Exemplar des eben erschienenen Werkes: *Analysis per quantitatum series, fluxiones ac differentias, cum enumeratione linearum tertii ordinis* (es ist dies eine von Jones im Jahre 1711 herausgegebene Sammlung kleinerer Schriften Newton's) zum Geschenk erhalten. Unter andern ist darin die Abhandlung: *De quadratura curvarum*, wieder abgedruckt, die mit einem Scholium schliesst, in welchem der oben erwähnte Fehler ebenfalls vorkommt. In dem Exemplar aber, welches Newton dem Nicolaus Bernoulli gegeben, habe er ein „*ut*" beigeschrieben; deshalb vermuthet Joh. Bernoulli, dass Newton entweder kurz vorher seinen Irrthum bemerkt oder auch von seinem Neffen eines Bessern belehrt worden sei.

Grossbritannien. Leibniz beschleunigte seine Abreise von Wien, traf aber erst in der zweiten Hälfte des Sept. 1714 in Hannover ein, nachdem der Hof bereits die Reise nach England angetreten hatte. Aus einer Instruction, die der König an die zurückbleibenden Minister erlassen hatte, ersah Leibniz sehr wohl die Ungnade, die ihm während seiner Abwesenheit durch die Eifersucht der Minister bereitet worden war. Er wollte dem König nach England folgen, erhielt aber durch die Minister den Bescheid, sich nur mit der Vollendung der Geschichte des Hauses Braunschweig zu befassen. Unter diesen drückenden Verhältnissen, die ihm den Aufenthalt in Hannover so verbitterten, dass er daran dachte, den Rest seiner Tage in Wien oder in Paris zu verleben, konnte Leibniz unmöglich die nöthige Musse finden, um sein versprochenes *Commercium epistolicum* in nächster Zeit herauszugeben; er wollte jedoch seine Rechte wahrnehmen, und schrieb die folgende, gegenwärtig zum ersten Male gedruckte Abhandlung: *Historia et origo calculi differentialis* *). Der Tod, der ihn am 14. Nov. 1716 ereilte, setzte allen seinen Entwürfen ein Ziel.

Es ist bekannt, dass der Streit von den Engländern noch nach dem Tode Leibnizens fortgeführt wurde; sie verfolgten den Schatten des grossen Mannes. Im Jahre 1722 veranstaltete man eine neue Ausgabe des *Commercium epistolicum*, und in

*) Von dieser Abhandlung sind zwei Entwürfe vorhanden. Ich bin dem späteren, der sogleich an dem grössern Umfang und der sorgfältigern Ueberarbeitung zu erkennen ist, so genau als es bei der öftern sehr unleserlichen Handschrift möglich war, in Ausdruck, Orthographie und Interpunction gefolgt, und habe in den Anmerkungen einiges aus dem ersten Entwurfe mitgetheilt. — Auch die beiden Abhandlungen im Anhange sind so treu als möglich wiedergegeben.

der dritten Ausgabe der *Principia*, die 1725 erschien, wurde für das Scholium *(ad Princip. lib. II. lem. II.)*, in welchem Newton die Entdeckung von Leibniz angeführt hatte, ein anderes gesetzt. Sogar in neuerer Zeit ist noch von dem Engländer David Brewster, im Leben Newton's, die Möglichkeit hingestellt worden, dass Leibniz ein Plagiat begangen haben könnte. Bei der einseitigen Auffassung des ganzen Streites von Seiten der Engländer ist es denn auch kein Wunder, dass berühmte französische Mathematiker ihren Landsmann Fermat als den *„premier inventeur"* der Differentialrechnung betrachtet wissen wollen. Unserer Meinung nach verdient aber der weniger der Entdecker der Differentialrechnung genannt zu werden, welcher zuerst in den bis dahin gebräuchlichen speciellen Methoden das allgemeine Princip erkannte, denn das war seit Archimedes gegeben, sondern der ist vielmehr der eigentliche Erfinder, der es zuerst verstand, Regeln für die Rechnungsoperationen aufzustellen und namentlich eine bequeme Bezeichnung einzuführen. Und in dieser Hinsicht ist entschieden Leibniz als der Entdecker der höhern Analysis zu betrachten. Denn es war besonders die von Leibniz so glücklich gewählte Bezeichnung der Differentiale, wodurch es den deutschen und französischen Mathematikern gelang, das Gebiet der höhern Analysis auf das ungeheuerste zu erweitern und mit den herrlichsten Entdeckungen zu bereichern, während von Seiten der Engländer, die sich der von Newton eingeführten Fluxionen bedienten, in dieser Hinsicht fast nichts geleistet wurde. Hiervon abgesehen werden wir in der vollständigen Sammlung der mathematischen Schriften Leibnizens den evidentesten Beweis führen, dass Leibniz durchaus selbstständig die Differentialrechnung fand, und zwar auf doppelte Weise: indirect, durch vollständige Veröffentlichung des Briefwechsels zwischen Leibniz und Oldenburg; direct, durch Auszüge aus Leibnizischen Manuscripten, aus denen sich ergeben wird, wie Leibniz nach und nach zur Entdeckung der Differentialrechnung gelangte.

Die wenigen Anmerkungen, die der ersten Abhandlung folgen, sind namentlich für angehende Mathematiker berechnet, und sollen weniger belehren, denn dazu dürften sie von zu geringem Umfange sein, als vielmehr die Aufmerksamkeit derselben auf das in neuester Zeit wenig bebaute Feld der Geschichte und Literatur der Mathematik hinlenken. Wenn auch diese Disciplin zum Verständniss der Wahrheiten der mathematischen Wissenschaften entbehrlich ist, so dürfte sie doch in vielen Fällen eine richtige Einsicht ganz besonders befördern. Bei dieser Gelegenheit erlaubt sich der Unterzeichnete einen Versuch zu erwähnen (Programm des Gymnasiums zu Salzwedel vom Jahre 1840), in welchem er durch eine historische Entwicklung des Princips der Differentialrechnung bis auf Leibniz gezeigt hat, wie nach und nach aus der Archimedeischen Exhaustionsmethode die höhere Analysis entstanden ist.

Als Anhang sind zwei noch ungedruckte Abhandlungen Leibnizens hinzugefügt, von denen die erstere ein früherer Entwurf zur Bekanntmachung der Differentialrechnung ist. Da Leibniz sich darin deutlicher über das Princip seiner neuen Rechnung ausspricht, als es in der von ihm später zum Druck beförderten geschah, und in derselben zugleich zeigt, wie tief er damals schon in das Gebiet der höhern Analysis eingedrungen war, so schien eine Bekanntmachung derselben trotz ihrer unvollendeten Form von Interesse zu sein. Die zweite dieser Abhandlungen dürfte insofern auf Beachtung Anspruch machen, als Leibniz darin einen Versuch gemacht hat, von den Rechnungsregeln der Differentialrechnung Beweise zu geben. Er wurde bekanntlich sowohl von seinen Zeitgenossen, als von der Nachwelt öfters getadelt, dass er diese Beweise schuldig geblieben sei.

Am Schlusse dieser Zeilen fühlt sich der Unterzeichnete gedrungen, den Höchsten und Hohen Behörden in Berlin und

Hannover, die mit besonderer Fürsorge, preiswürdiger Munificenz und ausgezeichneter Liberalität ihn bei der Untersuchung der Leibnizischen Manuscripte auf der Königlichen Bibliothek zu Hannover unterstützt und gefördert haben, seinen gehorsamsten Dank auszudrücken.

Salzwedel im April 1846.

Dr. Gerhardt.

Historia et Origo Calculi Differentialis.

Utilissimum est cognosci veras inventionum memorabilium origines, praesertim earum, quae non casu sed vi meditandi innotuere. Id enim non eo tantum prodest, ut Historia literaria suum cuique tribuat et alii ad pares laudes invitentur, sed etiam ut augeatur ars inveniendi, cognita methodo illustribus exemplis. Inter nobiliora hujus temporis inventa habetur novum Analyseos Mathematicae genus, Calculi differentialis nomine notum, cujus etsi jam satis explicata habeatur constitutio, nondum tamen origo et inveniendi ratio publice habetur. Eum ante annos fere quadraginta invenit Autor, et nonum in annum pressum edidit ante annos fere triginta, ex quo celebratus est non elogiis tantum, sed et usu ipso, dum multa praeclara ejus ope inventa prostant, et praesertim in Actis Eruditorum Lipsiensibus [1], ac deinde in Academiae Scientiarum Regiae editis in lucem Commentariis [2] habentur, ut novam ex eo faciem Mathesis nacta videatur. Nemo autem de vero inventore dubitavit, donec nuper Anno domini 1712 quidam novi homines sive ignoratione rei literariae superiorum temporum sive invidia, sive inclarescendi per lites spe, sive denique adulatione, aemulum ei quendam suscitarunt, cujus laudibus ea re non parum detractum est, nam plus habuisse credebatur, quam re hinc discussa compertum est. In eo autem fecere illi callide quod litem movere distulerunt, donec obiere harum rerum conscii, Hugenius [3], Wallisius [4], Tschirnhusius [5], aliique, quorum testimonio refelli potuissent. Nempe haec est inter alias ratio, cur praescriptiones temporales jure introductae sint, quod sive culpa sive dolo actoris possunt differri petitiones, donec adversario

pereant argumenta quibus se tueri possit. Mutarunt etiam statum controversiae, nam in eorum scripto, quod nomine Commercii Epistolici Johannis Collinsii 1712 edidere eo consilio, ut Leibnitio palmam dubiam facerent, de calculo differentiali vix quicquam: utramque paginam faciunt series quas vocant infinitas. Tales per divisionem inventas primus dedit publice Nicolaus Mercator Holsatus [6], sed rem generalem per extractionem Isaacus Newtonus [7] reddidit. Utile est inventum, et appropinquationes Arithmeticas transfert ad calculum Analyticum, sed nihil ad calculum differentialem. Utuntur etiam hoc sophismate, ut quoties aemulus ille aliquam quadraturam indagat per additionem eorum quibus gradatim augetur figura, statim clament usum calculo differentiali (verb. gr. p. 15. Commercii). Sed ita calculum differentialem dudum habuissent Keplerus [8] (in Dolio Austriaco), Cavallerius [9], Fermatius [10], Hugenius, Wallisius, et qui non illa indivisibilia vel infinite parva tractantes. At Hugenius, qui certe istas fluxionum methodos non ignorabat, quascunque isti norant aut jactant, ea aequitate fuit, ut agnosceret novam ab hoc calculo lucem Geometriae accensam, et pomoeria ejus hinc mire proferri. Et vero nemini ante Leibnitium in mentem venit constituere Algorithmum quendam calculi novi [11], per quem imaginatio a perpetua ad figuras attentione liberaretur; quod Vieta [12] et Cartesius [13] in Geometria Communi seu Apolloniana fecerant; sed altiora ad Geometriam Archimedeam [14] pertinentia et lineas quas ideo mechanicas vocabat Cartesius diserte a calculo suo excluserat; at vero novo Leibnitii calculo jam tota quanta est Geometria calculo Analytico subjecta est, lineaeque illae Cartesio-Mechanicae ipsi Transcendentes etiam ad aequationes locatas sunt revocatae considerando differentias dx, ddx etc. et reciprocas differentiis summas ut functiones quasdam ipsarum x et ita in calculum introducendo, cum antea non aliae fuerint adhibitae functiones quantitatum quam $x, xx, x^3, \sqrt{x}$ etc. seu potentiae et radices. Unde intelligi potest, qui quantitates illas expressere per 0, ut Fermatius, Cartesius, et ille ipse aemulus in suis Principiis 16... editis, longissime adhuc a calculo differentiali abfuisse, cum ita nec gradus differentiarum, nec diversarum quantitatum functiones differentiales discerni possint. Talia igitur a quoquam ante Leibnitium factitata ne minimum quidem uspiam vestigium extat. Et quo jure adversarii nunc Newtono talia vendicant,

posset aliquis Cartesii analysin etiam Apollonio vindicare, qui rem calculi habebat, calculum ipsum non habebat. Unde etiam nova per calculum differentialem inventa discipulos Newtoni latuerunt, nec aliquid ipsi alicujus momenti proferre nec etiam paralogismos evitare potuerant, donec calculum Leibnitianum didicerunt, ut in Davide Gregorio[15] Catenariam affectante compertum est. Ausi autem sunt vitilitigatores illi, abuti nomine Societatis Regiae Anglicanae, quae postea significari curavit, nihil a se hac de re decretorie pronuntiatum, quod etiam ejus aequitate dignum est, cum utraque pars audita non esset, et noster ipse ne scivisset quidem cognitionem rei aggressam Societatem: alioqui communicanda cum ipso fuissent nomina eorum quibus relationem mandatura erat, ut vel recusari vel instrui possent. At ipse quidem miratus non argumentis, sed figmentis incessi fidem suam, tales responsione indignos duxit, pro certo habens coram expertibus hujus doctrinae (id est maxima lectorum parte) frustra litigari; intelligentes autem re discussa iniquitatem imputationum facile agnituros. Accedebat quod erat absens domo, cum ista ab adversariis sparsa sunt, et redux post biennii intervallum distractusque negotiis sero reperire et consulere potuit reliquias antiqui sui commercii literarii, unde ipse se de rebus tam longinquis, id est ante plus quam quadraginta annos gestis instruere posset; nam literarum plerarumque a se olim scriptarum apographa non servarat, et quas Wallisius in Anglia inventas ipso consentiente in Tomo Operum tertio edidit, ipse plerasque non habebat. Non defuere tamen amici, quibus fama ejus curae esset; et quidam Mathematicus nostri temporis primarius[16], in hac doctrina profundissimus, et neutri addictus, cujus benevolentiam pars adversa per artes frustra captaverat, candide pronuntiavit rationibus judicii sui adjectis, et publice sciri non aeque tulit, sibi videri aemulum illum non tantum non invenisse Calculum differentialem, sed etiam ne satis quidem intellexisse. Alius etiam amicus inventoris haec aliaque brevi scheda in lucem misit, ut vanae jactationes retunderentur. Sed majus operae pretium erat ipsam viam ac rationem qua ad novum hoc calculi genus inventor pervenit innotescere; ea enim hactenus publice ignoratur etiam illis ipsis fortasse, qui in partem inventi venire vellent, quam exponere ipse, et progressus studiorum suorum Analyticorum partim ex memoria, partim ex

scriptis extantibus et veterum schedarum qualibuscunque reliquiis tradere, eaque ratione Historiam profundioris Matheseos artemque ipsam inveniendi justo libello illustrare decreverat. Sed cum id nunc per necessarias occupationes fieri non posset, permisit ut hoc compendium partis dicendorum per amicum conscium in lucem interim daretur et publicae curiositati nonnihil satisfieret.

Autor hujus novae Analyseos in primo aetatis flore studiis historiarum et jurisprudentiae innato quodam genio meditationes profundiores adjunxerat et inter alia numerorum proprietatibus combinationibusque delectabatur et de Arte etiam Combinatoria A. d. 1666 libellum ediderat, postea ipso inconsulto recusum; et puer adhuc logicam versans [17] animadverterat ultimam veritatum a ratione pendentium analysin abire in haec duo: definitiones et veritates identicas solas necessariarum vere primitivas indemonstrabilesque; et cum objiceretur ipsi, veritates identicas inutiles et nugatorias esse, ipse contrarium etiam experimentis ostendebat; atque inter alia jam tum monstrabat Axioma illud magnum, Totum esse majus parte, demonstrari per syllogismum, cujus major propositio esset definitio, minor esset propositio identica. Nam si duorum unum sit aequale parti alterius, illud *Minus*, hoc *Majus* appellari quae sit definitio. Unde si definitioni isti axioma hoc identicum atque indemonstrabile adjungatur quod omne magnitudine praeditum sibi ipsi aequale est, seu $A = A$, syllogismus talis nascatur: Quicquid parti alterius aequale est, id altero minus est (per definitionem) Pars parti totius aequalis est (nempe sibi, per veritatem identicam) Ergo pars toto minor est. Q. E. D. Inde pergens observabat ex hoc $A = A$, vel $A - A = 0$ utique identico, et ut prima fronte videri possit, prorsus spernendo, oriri pulcherrimam quandam differentiarum proprietatem, nam

$$A \underbrace{- A + B}_{L} \underbrace{- B + C}_{+M} \underbrace{- C + D}_{+N} \underbrace{- D + E}_{+P} - E \text{ esse } = 0$$

Si jam ponantur A, B, C, D, E esse quantitates crescentes, et differentiae earum proximae $B - A$, $C - B$, $D - C$, $E - D$ vocentur L, M, N, P, hinc fieri $A + L + M + N + P - E = 0$, vel $L + M + N + P = E - A$, id est summam differentiarum proximarum quotcunque aequari differentiae inter terminos extremos. Exempli causa loco A, B, C, D, E, F sumantur numeri

quadrati 0, 1, 4, 9, 16, 25, loco differentiarum prodibunt numeri impares 1, 3, 5, 7, 9

0	1	4	9	16	25
	1	3	5	7	9

ubi patet fore $1+3+5+7+9=25-0=25$, et $3+5+7+9=25-1=24$, idemque locum habere quantuscunque sit numerus Terminorum differentiarumve et quicunque assumantur termini extremi. Atque hac tam facili jucundaque observatione delectatus noster adolescens varias numericas series tentabat, ac progrediebatur etiam ad differentias secundas seu differentias differentiarum, et ad differentias tertias seu differentias inter differentias differentiarum, atque ita porro. Atque ita observabat, evanescere differentias secundas numerorum naturalium seu ordine sumtorum inde a 0, evanescere tertias ab ipsis quadratorum, quartas cuborum, quintas biquadratorum, sextas surdesolidorum; et ita porro; et constantem esse differentiam primam naturalium 1, secundam quadratorum $1.2=2$; tertiam cuborum $1.2.3=6$, quartam biquadratorum $1.2.3.4=24$, quintam surdesolidorum $1.2.3.4.5=120$, et ita porro: quae aliis licet dudum observata, ipsi nova erant, et facili jucunditate sua invitantia ad progressus. Sed combinatorios quos vocabat numeros inprimis meditabatur, quorum nota est haec Tabula, ubi praecedens series horizontalis vel verticalis semper continet differentias primas seriei sequentis primae, secundas seriei sequentis, et tertias tertiae etc. seu summas secundas seriei. Et quaevis series horizontalis vel verticalis continet summas seriei praecedentis primae, summas summarum seu summas secundas seriei praecedentis secundae, tertias tertiae.

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126
1	6	21	56	126	252
1	7	28	84	210	462
		etc.		etc.	

Sed etiam ut addamus aliquid nondum fortasse vulgare, generalia quaedam de differentiis et summis theoremata eruebat, qualia sunt sequentia. Serie a, b, c, d, e etc. decrescente in infinitum, sunt

Termini		a	b	c	d	e	etc.		
Diffrae	1mae		f	g	h	i	k	etc.	
	2dae			l	m	n	o	p	etc.
	3tiae			q	r	s	t	u	etc.
	4tae			β	γ	δ	ε	θ	etc.
	etc.			λ	μ	ν	ϱ	υ	etc.

posito Termino primo a, ultimo ω, inveniebat

$$a - \omega = 1f + 1g + 1h + 1i + 1k + \text{etc.}$$
$$a - \omega = 1l + 2m + 3n + 4o + 5p + \text{etc.}$$
$$a - \omega = 1q + 3r + 6s + 10t + 15u + \text{etc.}$$
$$a - \omega = 1\beta + 4\gamma + 10\delta + 20\varepsilon + 35\theta + \text{etc.}$$
etc.

Et rursus

$$a - \omega = \begin{cases} +1f \\ +1f - 1l \\ +1f - 2l + 1q \\ +1f - 3l + 3q - 1\beta \\ +1f - 4l + 6q - 4\beta + 1\lambda \\ \text{etc. etc. etc. etc. etc.} \end{cases}$$

Unde loquendo stylo a se postea introducto, et terminum seriei vocando y (quo casu etiam est $a = y$) licebit differentiam primam vocare dy, secundam ddy, tertiam d^3y, quartam d^4y; et terminum alterius seriei vocando x, licebit summam horum vocare $\int x$, et summam summarum seu summam secundam $\int\int x$, et summam tertiam $\int^3 x$, et summam quartam $\int^4 x$. Hinc posito $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{etc.}$ esse $= x$ seu x esse numeros naturales, quorum $dx = 1$, tunc $1 + 3 + 6 + 10 + \text{etc.}$ fit $= \int x$ et $1 + 4 + 10 + 20 + \text{etc.}$ fit $= \int\int x$, et $1 + 5 + 15 + 35 + \text{etc.}$ fit $= \int^3 x$, et ita porro. Unde tandem fit:

$$y - \omega = dy \,.\, x - ddy \int x + d^3y \int\int x - d^4y \int^3 x + \text{etc.}$$

quod est $= y$, posito continuari in infinitum, seu fieri $\omega = 0$. Unde etiam sequitur summatio ipsius seriei, seu fit:

$y = yx - dy \int x + ddy \int\int x - d^3y \int^3 x + \text{etc.}$ Quae bina theoremata id habent egregium, ut aeque locum habeant in utroque Calculo Differentiali, tam Numerico, quam Infinitesimali, de quorum discrimine infra dicemus.

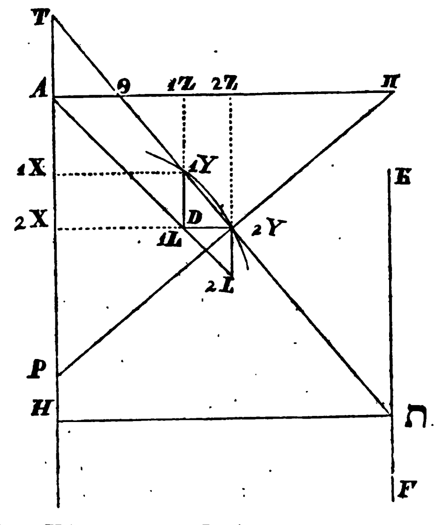
Numericarum autem veritatum ad Geometriam applicatio, et consideratio etiam serierum infinitarum, nostro tunc adolescenti prorsus ignota erat, satisque habebat talia in numerorum seriebus cum voluptate observasse. Nec praeter vulgatissima praecepta practica ipse tunc quicquam de Geometria tenebat, et Euclidem vix satis attente aspexerat, aliis plane studiis intentus. Forte tamen incidit in Vincentii Leotaudi amoeniorem curvilineorum contemplationem [18], ubi autor ille varias tractabat Lunularum Quadraturas, et in Cavallerii Geometriam indivisibilium, quibus nonnihil inspectis facilitate methodorum

delectabatur; sed nullo tunc animo in Mathematica illa profundiora se immergendi, tametsi physices et Mechanices practicae studiis subinde operam daret, ut ex edito *Hypotheseos physicae* opusculo [19] intelligi potest. Erat tunc ascitus in Revisionum Consilium Eminentissimi Electoris Moguntini, et a gratiosissimo judiciosissimoque Principe (qui transiturum et longius iturum juvenem sibi vindicaverat) permissione continuandae peregrinationis impetrata, Lutetiam Parisiorum A. D. 1672 profectus erat. Ibi in Summi Viri Christiani Hugenii notitiam venit, cujus exemplo et consiliis se debere semper professus est aditum ad altiorem Mathesin. Is tunc forte suum de Pendulis opus edebat. Cujus cum exemplum juveni dono attulisset et inter colloquendum animadvertisset Centri gravitatis naturam huic non satis cognitam, quid hoc rei esset, et quomodo indagari posset, paucis exposuit. Id nostrum a veterno excitavit, talia a se ignorari indignum putantem. Sed tunc quidem vacare his studiis non potuit; et mox sub exitum anni in Angliam transfretavit in comitatu Legati Moguntini, ibique paucis septimanis cum Legato haesit, et ab Henrico quidem Oldenburgio [20], Societatis Regiae Secretario tunc, in illustre Collegium introductus est, cum nemine autem de Geometria contulit (in qua ipse tunc erat plane proletarius) sed cum chymiam non negligeret, aliquoties illustrem virum Robertum Boylium [21] adiit, et cum ibi forte in Pellium [22] incidisset, et suas quasdam observationes numericas ei narrasset, dixit Pellius haec non esse nova, et nuper Nicolaum Mercatorem in sua Hyperbolae Quadratura publice monstrasse, differentias potentiarum Numericarum continuatas tandem evanescere. Ea occasio nostro fuit, quaerendi libellum Nicolai Mercatoris. Collinium [23] tunc non novit, cum Oldenburgio tantum de rebus literariis, physicis et Mechanicis collocutus est, de Geometria autem profundiore atque adeo de seriebus illis Newtoni ne verbulum quidem commutavit et plane in istis hospitem se fuisse nec nisi in numerorum proprietatibus, et quidem mediocriter admodum versatum satis ostendit ipsis literis cum Oldenburgio commutatis, quae nuper sunt ab adversariis productae, idemque ex illis haud dubie patebit, quas adhuc in Anglia asservari scribunt, sed suppresserunt, credo forte quod ex ipsis satis appareret, nullum adhuc de rebus Geometricis ei cum Oldenburgio commercium fuisse, cum ipsi tamen credi velint (ne minimo quidem adducto in-

dicio) jam tum ei ab Oldenburgio communicata fuisse, quaecunque inter Collinsium, Gregorium [24], Newtonum acta is habebat.

Sed reversus ex Anglia in Galliam A. D. 1673 fatis interim functo Eminentissimo Electore Moguntino, cujus gratia Moguntiae obhaeserat, jam liberior hortante Hugenio coepit tractare Analysin Cartesii (antea vix eminus salutatam) et ut in Geometriam Quadraturarum introduceretur, Honorati Fabri [25] Synopsin Geometricam, Gregorium a S. Vincentio [26], et Dettonvillaei (id est Pascalii) [27] libellum consuluit. Porro ex uno quodam exemplo Dettonvillaei lux ei subito oborta est, quam ipse Pascalius (quod mireris) inde non hauserat. Nam dum ille demonstrat Theorema Archimedeum de superficie sphaerae aut ejus partium mensuranda, utitur methodo, qua omnis solidi rotatione circa axem aliquem descripti superficies ad proportionalem figuram planam revocari potest. Tale enim inde noster sibi paravit theorema generale: Rectae perpendicularis ad curvam portiones interceptae inter axem et curvam, ordinatim et normaliter applicatae ad axem, dant figuram momento curvae ex axe proportionalem. Id cum monstrasset Hugenio, valde is probavit, fassusque est, hujus ipsius theorematis ope se superficiem Conoidis parabolici, aliarumque hujusmodi superficierum in opere de Horologio oscillatorio sine demonstratione positarum, ante multos annos reperisse. His noster excitatus, animadversa foecunditate harum meditationum, cum prius infinite parva tantum ut intervalla ordinatarum Cavalleriano more considerasset, commentus est Triangulum, quod vocavit characteristicum ${}_1YD_2Y$ (Fig. 1.), cujus latera D_1Y, D_2Y aequalia ipsis ${}_1X_2X$, ${}_1Z_2Z$ essent portiones coordinatarum seu coabscissarum AX, AZ, et tertium latus ${}_1Y_2Y$ esset portio tangentis $T\sqcap$ si opus productae. Et huic Triangulo licet inassignabili (seu infinite parvo) videbat semper posse Triangula similia assignabilia. Sunto enim AXX, AZZ condirigentes normales, coabscissae AX, AZ; coordinatae YX, YZ, tangens $T\Theta Y$, perpendicularis $PY\Pi$, subtangentiales XT, $Z\Theta$; subnormales XP, $Z\Pi$, denique ducatur EF parallela Axi AX; eique Tangens TY occurrat in $\sqcap$, unde ad axem agatur normalis $\sqcap H$. Fient triangula similia ${}_1YD_2Y$; TXY, $YZ\Theta$, $TA\Theta$; YXP, ΠZY, ΠAP; $TH\sqcap$ aliaque hujusmodi plura si lubet. Hinc verbi gratia ob Triangula similia ${}_1YD_2Y$, ${}_2Y_2XP$ fit $P_2Y \cdot {}_1YD = {}_2Y_2X \cdot {}_2Y_1Y$, id est perpendicularis

Fig. 1.

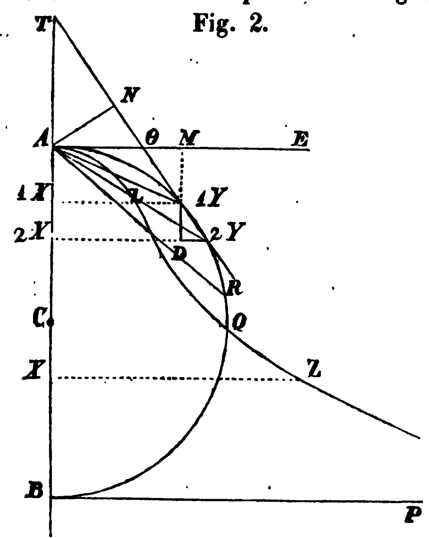


$P{}_2Y$ ducta in ${}_1YD$ seu ${}_1X{}_2X$ elementum axis, aequatur ipsi ordinatae ${}_2Y{}_2X$ ductae in ${}_1Y{}_2Y$ elementum curvae, id est momento elementi curvae ex axe. Undé totum momentum curvae per summam perpendicularium axi applicatarum habetur. Et ob triangula similia ${}_1YD{}_2Y$ et $TH\sqcap$ fiet ${}_1Y{}_2Y : {}_2YD = T\sqcap : \sqcap H$, seu $\sqcap H . {}_1Y{}_2Y = T\sqcap . {}_2YD$, id est constans $\sqcap H$ ducta in Elementum curvae ${}_1Y{}_2Y$ aequatur ipsi $T\sqcap$ ductae in ${}_2YD$, seu ${}_1Z{}_2Z$ elementum coabscissae. Et proinde figura plana orta ex ipsis $T\sqcap$ ordinatim normaliter applicatis ad AZ in Z aequatur rectangulo sub curva in rectam extensa et constante $H\sqcap$. Sic etiam ob triangula similia ${}_1YD{}_2Y$ et ${}_2Y{}_2XP$, fit ${}_1YD : D{}_2Y = {}_2Y{}_2X : {}_2XP$ atque adeo ${}_2XP . {}_1YD = {}_2Y{}_2X . D{}_2Y$, seu subperpendiculares ${}_2XP$, ordinatim applicatae ad axem seu ad ${}_1YD$ vel ${}_1X{}_2X$ aequantur ordinatis ${}_2Y{}_2X$ in sua Elementa $D{}_2Y$ ordinatim ductis. Sed Rectae inde a nihilo crescentes in sua Elementa ducta conficiunt triangulum. Esto enim semper $AZ = ZL$, fiet triangulum rectangulum AZL, quod est dimidium quadrati AZ, itaque figura orta ex subperpendicularibus ordinatim et perpendiculariter axi applicatis semper aequatur dimidio quadrato ordinatae. Et proinde, data figura qnadranda, quaeritur figura cujus subperpendiculares aequentur ordinatis figurae datae, ea erit figurae datae quadratrix. Atque ita ex hac facillima meditatione habemus reductionem ad quadraturas

planas superficierum rotatione genitarum, et rectificationis curvarum; et simul ipsas figurarum quadraturas reducimus ad problema tangentium inversum. His ita repertis magnam vim theorematum (ex quibus multa erant non elegantia) in chartam conjecit noster, duarum classium. Pars enim contenta erat quantitatibus assignabilibus, more non Cavallerii tantum et Fermatii et Honorati Fabrii, sed et Gregorii a S. Vincentio, Guldini [28] et Dettonvillaei tractatis; pars vero pendebat ab inassignabilibus, multoque longius Geometriam provehebat. Sed haec postea prosequi neglexit noster, postquam animadvertit eandem Methodum non tantum ab Hugenio, Wallisio, Wrenno [29] et Heuratio et Neilio [30], sed etiam a Jacobo Gregorio et Barrovio [31] usurpatam excultamque fuisse. Exponere tamen hoc loco non inutile visum est, ut appareat, quibus gradibus ad majora sit perventum, atque etiam ut velut manu ducantur, qui adhuc tirones in recondita Geometria altius assurgere optant.

Atque haec Anno domini 1673 et parte Anni 1674 Parisiis egit Leibnitius. Sed Anno 1674 (quantum recordari potest) incidit in Arithmeticum illum celebrem Tetragonismum [32]; quod qua ratione factum sit exponere operae pretium erit. Solebant Geometrae figuras resolvere in rectangula per parallelas ordinatim ductas. Ipse oblata forte occasione resolvit in Triangula per rectas in unum punctum concurrentes, dispexitque quomodo aliquid novi inde commode duci posset. Sit Fig. 2. Linea *AYR*,

Fig. 2.



ducantur AY quot lubet, ducatur et Axis quicunque AC, eique normalis vel coaxis AE, hos tangens ipsius curvae in Y secet in T et Θ. In eam ex A agatur normalis AN, manifestum est triangulum Elementare $A\,_1Y_2Y$ aequari dimidio rectangulo sub elemento curvae $_1Y_2Y$ et sub ipsa AN. Ducatur jam triangulum characteristicum supra dictum $_1YD_2Y$, cujus hypotenusa sit portio tangentis vel elementum arcus, latera sint parallela axi et coaxi. Patet ob triangula similia $AN\Theta$ et $_1YD_2Y$ fore $_1Y_2Y : {}_1YD = A\Theta : AN$ seu $A\Theta . {}_1YD$ vel $A\Theta . {}_1X_2X = AN . {}_1Y_2Y =$ (per supra dicta) duplo triangulo $A\,_1Y_2Y$. Itaque si quaevis $A\Theta$ translata intelligatur XY, si opus productam, ita ut in hac sumatur AZ, fiet inde Trilineum $AXZA$ aequale duplo segmenti $AY\smile A$, comprehensi recta AY et arcu $A\smile Y$. Atque ita habentur quas vocaverat figuras segmentorum, seu segmentis proportionales. Similis methodus procedit, cum punctum A sumatur extra curvam, et tunc hac methodo habentur Trilinea sectoribus proportionalia ex puncto illo concursus abscissis. Quin etsi rectae non in lineam sed in curvam (quam ordinatim tangunt) concurrant, non eo minus hac ratione utilia Theoremata formabuntur, sed talia persequi hujus loci non est. Sufficit nostro scopo considerare Figuram Segmentorum et in Circulo quidem; ubi si punctum A ponatur in initio quadrantis AYQ curva $AZQZ$ secabit circulum in fine quadrantis Q, atque inde descendens basi BP (normali ad diametrum AB in altero extremo B) asymptota erit; et tamen tota figura infinitae longitudinis, inter diametrum AB, basin BP etc. et curvam eas Asymptotam $AZQZ$ etc. comprehensa aequabitur circulo circa diametrum AB. Sed ut ad rem veniamus, posito radio unitate et AX vel ΘZ, x, et $A\Theta$ vel AZ, z, fiet $x = 2zz :, 1 + zz$ [33] summa autem ipsarum x ad $A\Theta$ applicatarum, seu ut hodie loquimur $\int x\,dz$ est trilineum $A\Theta ZA$, complementum trilinei $AXZA$ quod duplo segmento circulari ostendimus aequale. Idem etiam autor assecutus est Methodo transmutationum [34], quam in Angliam misit. Id agitur ut omnes $\sqrt{(1 - xx)} = y$ summentur, fiat $y = \pm 1 \mp xz$, unde fit $x = 2z :, 1 + zz$ et $y = \pm zz \mp 1, :, zz + 1$. Ita rursus tantum opus est summari rationales. Nova haec et elegans via visa est, etiam Newtono, sed fatendum est, non esse universalem. Caeterum patet hinc etiam haberi arcum ex sinu, et alia id genus, sed mediate. Quin vero postea intellexit noster haec inde deducere Newto-

num immediate suis extractionibus, id cognoscere desideravit. Hinc statim apparuit, qua methodo Nicolaus Mercator dederat Arithmeticum Hyperbolae Tetragonismum per seriem infinitam, etiam circuli dari, sublata asymmetria, et dividendo per $1 + zz$, ut ille diviserat per $1 + z$. Et mox invenit autor theorema generale, pro dimensione figurae conicae centrum habentis. Nempe sector comprehensus arcu sectionis conicae a vertice incipiente, et rectis ex centro ad ejus extrema ductis, aequatur rectangulo sub semilatere transverso, et recta $t \pm \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \pm \frac{1}{7}t^7 + \text{etc.}$ posito t esse portionem tangentis in vertice, interceptam inter verticem et tangentem alterius extremi, et unitatem esse quadratum a semiaxe conjugato seu rectangulum sub dimidiis lateribus recto et transverso et $\pm$ significare $+$ in Hyperbola, sed $-$ in Circulo et Ellipsi. Unde etiam posito quadrato diametri 1 fiebat Circulus $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.}$ Hoc inventum cum noster Hugenio adjecta demonstratione ostendisset, mirifice ille applausit et cum remitteret dissertationem literis adjunctis dixit, id inventum semper memorabile apud Geometras futurum, et spem inde nasci, posse aliquando ad solutionem generalem perveniri; nempe aut exhibendo verum valorem aut demonstrando impossibilitatem in quantitatibus receptis. Nempe neque ipse, neque inventor neque alius quisquam Parisiis, quod constet, aliquid de serie rationali infinita magnitudinem Circuli exhibente (quas a Newtono et Gregorio excogitatas postea constitit) quicquam fando audierat. Certe non Hugenius, ut ex hac ipsa succincta ejus Epistola . . . .[35] data patet. Itaque hac prima vice Circulum seriei quantitatum rationalium exacte aequalem demonstratum Hugenius credidit. Idem (vel ipsius Hugenii harum rerum peritissimi testimonio fretus) credidit inventor atque ideo Epistolas illas binas ad Oldenburgium Anno 1674 scripsit[36], quas adversarii ipsi edidere, in quibus tanquam rem novam nuntiat, se et quidem primum omnium, invenisse magnitudinem Circuli serie numerorum rationalium expressam, quod jam in Hyperbola praestitum constabat. Quod si jam ipsi Londini agenti anno praecedente Oldenburgius series Gregorii et Newtoni communicasset, debebat summa esse ipsius impudentia, hoc ad Oldenburgium scribere audentis; et Oldenburgii obliviositas vel praevaricatio dissimulationem non exprobrantis. Nam ipsi adversarii exhibent responsionem Oldenburgii, qua tantum indicat

(ignorare Te nolim ait) similes series etiam Gregorio et Newtono innotuisse, quas etiam anno demum sequente literis mense Aprili datis (quas ipsi exhibent) communicavit. Unde intelligi potest, quam fuerint vel caeci invidia, vel perfricti malignitate, qui nunc fingere audent, Oldenburgium talia ipsi jam anno praecedente communicasse. Quanquam aliquid caecitatis insit malignitati, quod non viderunt edere se quibus sua figmenta everterunt, nec potius has ipsius Oldenburgiique literas ut alias ex toto vel parte suppresserunt. Caeterum ex eo demum coepit ipse cum Oldenburgio communicare de rebus Geometricis, ex quo scilicet ipse sese aliquid communicatione dignum invenisse judicavit, antea in his studiis tiro, priores autem Parisiis datae 30 Martii, 26 Aprilis, 24 Maji, 8 Juni Anni 1673 quas ipsi adesse ajunt sed supprimunt cum Oldenburgii responsionibus, haud dubie de aliis rebus egere, nihilque illis praebuere, unde fictitiae illae Oldenburgii communicationes credibiliores reddi possent. Caeterum ubi audivit noster Newtonum et Gregorium ad series pervenisse per extractiones radicum, agnovit hoc sibi novum esse, neque initio satis intellexit, idque ingenue fassus est ipse et in nonnullis declarationem expetivit, praesertim quando series quaerebantur reciprocae, pro quibus ex infinita serie extrahenda erat radix per aliam seriem infinitam atque hinc etiam patet falsum esse quod adversarii fingunt, Oldenburgium ei Newtoniana scripta communicasse; nam ita declarationem petere opus non habuisset, sed postea ubi calculum differentialem detegere coepit, novam excogitavit artem longe universalissimam inveniendi series infinitas sine extractionibus accommodatam quantitatibus tam communibus quam transcendentibus, assumta serie quaesita tanquam inventa; eaque methodo usus est ad absolvendum Quadraturae Arithmeticae opusculum[37], ubi etiam aliena inventa serierum, pro arcu ex sinu, aut ex sinu complementi inserebat, et regressum etiam, dato scilicet arcu sinum vel sinum complementi invenire, nova hac Methodo demonstrabat. Eaque etiam causa est, cur postea methodis alienis non indiguerit; et tandem hanc suam novam eliciendi series rationem in Actis Eruditorum publicavit. Caeterum cum in eo esset, ut Opusculum illud Quadraturae Arithmeticae Parisiis ederet in Germaniam revocatus est, et novi calculi arte exculta, priora minus curavit.

Porro nunc jam exponendum est, quomodo paulatim ad

novum Notationis genus pervenerit Noster, quod calculum differentialem appellavit. Jam A. D. 1672 de numerorum proprietatibus colloquenti Hugenius proposuerat hoc problema: invenire summam seriei decrescentis fractionum, cujus numeratores sint unitates, denominatores vero sint numeri triangulares, cujus summam ajebat se invenisse inter collationes cum Huddenio [38] de aleae aestimatione. Noster invenit summam esse 2, quod cum Hugeniana propositione consentiebat. Eadem opera invenit summas seriorum hujusmodi numericarum, cum denominatores sunt Numeri combinatorii quicunque idque indicavit Oldenburgio Febr. 1673, quam adversarii edidere. Cum postea Pascali Triangulum Arithmeticum [39] vidisset, ejus exemplo Harmonicum concinnavit.

Triangulum Arithmeticum,
ubi series fundamentalis est progressionis Arithmeticae
nempe 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Triangulum Harmonicum [40],
ubi series fundamentalis est progressionis Harmonicae
$\frac{1}{1}. \frac{1}{2}. \frac{1}{3}. \frac{1}{4}. \frac{1}{5}. \frac{1}{6}. \frac{1}{7}$

$\frac{1}{1}$
$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{3}$
$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{4}$
$\frac{1}{5}$ $\frac{1}{20}$ $\frac{1}{30}$ $\frac{1}{20}$ $\frac{1}{5}$
$\frac{1}{6}$ $\frac{1}{30}$ $\frac{1}{60}$ $\frac{1}{60}$ $\frac{1}{30}$ $\frac{1}{6}$
$\frac{1}{7}$ $\frac{1}{42}$ $\frac{1}{105}$ $\frac{1}{140}$ $\frac{1}{105}$ $\frac{1}{42}$ $\frac{1}{7}$

in quo si denominatores cujuslibet seriei oblique descendentis in infinitum, itemque cujuslibet seriei parallelae finitae dividantur per denominatorem termini in serie prima, prodeunt numeri combinatorii iidem qui in triangulo Arithmetico habentur. Utrique autem triangulo hoc est commune, quod series obliquae

sunt invicem summatrices vel differentiales. In Triangulo Arithmetico series data est summatrix proxime praecedentis, et est differentialis proxime sequentis; at in Triangulo Harmonico contra series data est summatoria proxime sequentis et differentialis proxime antecedentis. Ex quibus sequitur esse

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \text{etc.} = \tfrac{1}{0}$$
$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{21} + \tfrac{1}{28} + \text{etc.} = \tfrac{2}{1}$$
$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{20} + \tfrac{1}{35} + \tfrac{1}{56} + \tfrac{1}{84} + \text{etc.} = \tfrac{3}{2}$$
$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{35} + \tfrac{1}{70} + \tfrac{1}{126} + \tfrac{1}{210} + \text{etc.} = \tfrac{4}{3}$$

Et ita porro.

Atque haec quidem habebat, cum nondum versatus esset in Analysi Cartesiana; sed cum hanc adjecisset, consideravit seriei terminum posse plerumque generali aliqua notatione designari, per quem ad seriem aliquam simplicem refertur. Verb. gr. si quivis terminus seriei naturalis 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7 etc. vocetur x, quemlibet Terminum seriei quadratorum fore xx, vel cuborum fore x^3 etc. quemlibet terminum triangularem, velut 0, 1, 3, 6, 10 fore $\frac{x.\overline{x+1}}{1.2}$ seu $\frac{xx+x}{2}$, quemlibet pyramidalem 0, 1, 4, 10, 20 etc. fore $\frac{x.\overline{x+1}.\overline{x+2}}{1.2.3}$ vel $\frac{x^3+3xx+2x}{6}$ et ita porro.

Et hinc per calculum generalem datae seriei posse inveniri seriem differentialem, et interdum etiam summatoriam, quando eam in numeris capit. Ex. gr. quadratus est xx, proxime major est $xx + 2x + 1$, differentia eorum est $2x + 1$, id est series numerorum imparium est series differentialis quadratorum. Nam si x sit 0, 1, 2, 3, 4 etc. $2x + 1$ sunt 1, 3, 5, 7, 9. Eodem modo differentia inter x^3 et $x^3 + 3xx + 3x + 1$ est $3xx + 3x + 1$, itaque talis est terminus pro serie differentialis cuborum. Porro si valor termini seriei propositae possit ita exprimi per variantem x, ut varians neque denominatorem neque exponentem ingrediatur, videbat datae seriei summatricem semper inveniri posse. Ex. gr. si quaereretur summatrix quadratorum, cum constaret eam non posse assurgere ultra gradum cubi, fingebat ejus terminum esse $lx^3 + mxx + nx = z$ quaeritur $dz = xx$, fiet $dz = ld(x^3) + md(xx) + n$ (posito $dx = 1$) sed $d(xx) = 2x + 1$, et $d(x^3) = 3xx + 3x + 1$ per jam inventa, ergo fiet

$$dz = \begin{array}{r} 3lxx + 3lx + l \\ 2mx + m \\ n \end{array} \;\backsimeq xx$$

Ergo fit $l = \frac{1}{3}$, $m = -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + n = 0$ seu $n = \frac{1}{6}$ seu Ter-

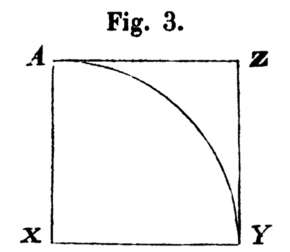
minus seriei quadratorum summatricis est $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x$ vel $2x^3 - 3xx + x, : 6$. Exempli causa si quis velit summam novem vel decem primorum quadratorum ab 1 usque ad 81 vel ab 1 usque ad 100, pro x sumat 10 vel 11 numerum proxime majorem radice ultimi quadrati, et $2x^3 - 3xx + x, : 6$ erit $2000 - 300 + 10, : 6 = 285$ vel $2 . 1331 - 3 . 121 + 11, : 6 = 385$. Nec difficilius est multo centum aut 1000 quadratos per compendium summare. Eademque methodus procedit in potentiis arithmeticorum quibuscunque aut formulis, quae ex potentiis talibus componuntur, ut scilicet semper quotcunque termini seriei talis compendio summari possint. Sed facile videbat noster hoc non semper procedere cum varians x ingreditur in denominatorem; ut scilicet summatrix series numerica reperiri possit; prosecutus tamen hanc ipsam Analysin generaliter invenit atque etiam in Actis Eruditorum Lipsiensibus ostendit, semper posse inveniri seriem summatricem, vel rem reduci ad summandum numerum terminorum fractorum simplicium velut $\frac{1}{x}$, vel $\frac{1}{xx}$, vel $\frac{1}{x^3}$ etc. qui numero terminorum finito proposito summari utique possunt, sed nondum compendiose satis; at si de numero terminorum infinito agatur, omnino summari non possunt termini quales $\frac{1}{x}$, quia tota series infiniti talis terminorum numeri est quantitas infinita, sed termini numero infiniti quales $\frac{1}{xx}$, vel $\frac{1}{x^3}$, etsi conficiant quantitatem finitam, tamen hactenus summari non possunt, nisi suppositis quadraturis. Itaque jam a. D. 1682 mense secundo Actorum Lipsiensium observavit, si exponantur numeri 1. 3, 3. 5, 5. 7, 7. 9, 9. 11 etc. seu 3, 15, 35, 63, 99 etc. atque inde fiat series fractionum $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99}$ etc. hanc seriem in infinitum descendentem componere non nisi $\frac{1}{2}$, sed si inde numeri excerpantur per saltum $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99}$ etc., exprimere magnitudinem semicirculi cujus diametri quadratum est 1. Nempe sit $x = 1$ vel 2 vel 3 etc. Terminus seriei $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35}$ etc. est $\frac{1}{4xx + 8x + 3}$, quaeritur terminus seriei summatricis. Tentetur simplicissima ratione, an possit habere hanc formam $\frac{e}{bx + c}$, erit $\frac{e}{bx + c} - \frac{e}{bx + b + c} = \frac{eb}{bbxx + bbx + bc + 2bcx + cc}$

$\sqcap\!\!\!\!\sqcap \frac{1}{4xx+8x+3}$ quas duas formulas identificando fit $b=2$, $eb=1$, ergo $e=\frac{1}{2}$, $bb+2bc=8$ seu $4+4c=8$ vel $c=1$. Et tandem $bc+cc=3$ quod succedit. Ergo terminus seriei summatoriae est $\frac{1:2}{2x+1}$ vel $\frac{1}{4x+2}$, sunt autem $4x+2$ imparium dupli. Postremo etiam indit modum aliquem Calculum differentialem adhibendi ad series numericas, quando varians cadit in ipsum exponentem, ut in progressione geometrica, ubi posita radice b terminus est b^x, existentibus x numeris naturalibus. Ergo terminus seriei differentialis erit $b^{x+1}-b^x$ $=b^x(b-1)$ unde manifestum seriem differentialem datae geometricae esse etiam geometricam datae proportionalem. Unde summa progressionis Geometricae habetur[41].

Facile autem animadvertit noster Calculum differentialem in Figuris esse mirum in modum facilem prae eo qui in numeris exercetur, quia in figuris differentiae ipsis differentibus comparari non possunt, quoties autem additione vel subtractione conjunguntur, quae sunt inter se incomparabilia, minora prae majoribus evanescunt, atque hinc etiam irrationales non minus facile differentiari quam surdas, tum ope logarithmorum ipsas quantitates exponentiales. Observabat autem lineas infinite parvas in figuris occurrentes nihil aliud esse quam differentias momentaneas linearum variantium. Et quemadmodum quantitates hactenus consideratae simpliciter apud Analystas habuerant suas functiones, nempe potentias et radices, ita jam quantitates ut variantes, habere novas functiones nempe differentias. Et ut habuimus hactenus x, xx, x^3 etc. y, yy, y^3 etc. ita posse adhiberi dx, ddx, d^3x etc. dy, ddy, d^3y etc. Eoque modo jam curvas etiam quas Cartesius tanquam Mechanicas ex Geometria exclusit aequationibus localibus exprimi et calculo tractari posse, animumque a continua ad figuras intentione liberari. Et in applicatione Calculi differentialis ad Geometriam, differentiationes primi gradus nihil aliud esse quam inventiones tangentium, differentiationes secundi gradus esse inventiones osculantium (quorum usum noster introduxit) et ita porro procedi posse. Neque vero haec tantum inservire ad tangentes et quadraturas; sed ad omne genus problematum et theorematum, ubi differentiae cum Terminis integralibus ut vocavit ingeniosissimus Bernoullius varie miscentur quemadmodum

in problematis Physico-Mechanicis fieri solet. Itaque generaliter constituit, si qua series Numerorum vel figura linearum proprietatem habeat ex duobus, vel tribus, vel quatuor etc. terminis proximis pendentem; posse exprimi per aequationem, quam ingrediantur differentiae primi, vel secundi, vel tertii gradus. Quin etiam theoremata invenit generalia pro gradu differentiae quocunque, uti habebamus theoremata pro gradu quocunque, et miram reperit analogiam inter potentias et differentias in Miscellaneis Berolinensibus publicatam. Quam si novisset aemulus, non adhibuisset puncta pro gradibus differentiarum, quae inepta sunt ad generalem differentiae gradum exprimendum, sed notam d a nostro impositam vel similem retinuisset, ita enim d^e potest exprimere gradum differentiae generalem. Caeterum hinc jam omnia calculo exprimi poterant, quae olim figuris dabantur. Nam $\sqrt{(dx\,dx + dy\,dy)}$ erat elementum curvae, ydx erat elementum areae, et $\int y\,dx$ et $\int x\,dy$ sibi mutuo esse complemento statim ex eo patet quod $d(xy) = xdy + ydx$ seu vicissim $xy = \int x\,dy + \int y\,dx$ quanquam interdum signa varientur; et ex eo quod $xyz = \int xy\,dz + \int xz\,dy + \int yz\,dx$, eo etiam tria solida exhibentur, quae sibi mutuo sunt complemento. Nec est opus theoremata illa nosse quae supra ex triangulo characteristico duximus, verb. gr. momentum curvae ex axe sufficit explicari per $\int x\sqrt{(dx\,dx + dy\,dy)}$. Et quae Gregorius de S. Vincentio habet de ductibus [42], quae ipse aut Pascalius de Ungulis aut Cuneis [43], omnia statim ex tali calculo nascuntur. Itaque quae antea ab aliis inventa cum applausu, a se detecta cum voluptate viderat; jam magnopere curare desiit, quod omnia jam in tali calculo continerentur. Ex. gr. momentum figurae $AXYA$ (Fig. 3.) ex axe AX est $\frac{1}{2}\int yy\,dx$. Momentum figurae ex tangente verticis est $\int xy\,dx$, momentum trilinei com-

Fig. 3.



plementalis *AZYA* ex tangente verticis est $\frac{1}{2}\int xx\,dy$. Sed haec duo momenta posteriora simul sumta componunt momentum rectanguli circumscripti *AXYZ* ex tangente verticis, adeoque mutuo sibi sunt complemento, quod est $\frac{1}{2}xxy$. Sed hoc sine consideratione figurae ostendit etiam calculus, nam $\frac{1}{2}d(xxy) = xy\,dx + \frac{1}{2}xx\,dy$, ita ut jam non magis tot praeclaris egregiorum virorum theorematis opus sit ad Geometriam Archimedeam, quam illis ab Euclide in libro 2. aut alibi datis plerisque, ad Geometriam communem. Pulchre evenit, ut aliquando Calculus Transcendentium ducat ad ordinarias, quod Hugenio inprimis satisfaciebat. Veluti si inveniatur $2\int\frac{dy}{y} = 3\int\frac{dx}{x}$, eo ipso fit $yy = x^3$; nempe ex natura Logarithmorum cum calculo differentiali combinata, quae etiam ipsamet ex eodem calculo derivatur. Esto enim $x^m = y$, fiet $mx^{m-1}\,dx = dy$. Ergo utrinque dividendo per aequalia erit $m\int\frac{dx}{x} = \int\frac{dy}{y}$. Rursus ex aeq. $m \log x = \log y$. Ergo $\log x : \log y = \int\frac{dx}{x} : \int\frac{dy}{y}$. Unde etiam calculus exponentialis tractabilis redditur. Esto enim $y^x = z$, fit $x \log y = \log z$. Ergo $dx \log y + x\,dy : y = dz : z$. Et ita exponentes a variante liberamus, aut vicissim utiliter variantem exponentem pro re nata transferimus. Denique ita ludus jocusque facta sunt quae olim in admiratione erant. Hujus autem omnis calculi nec vola nec vestigium est in aemuli scriptis ante edita a Nostro calculi praecepta extant, neque omnino quicquam quod non Hugenius aut Barrovius praestitissent modo eodem, si eadem tractassent. Sed quantum adjumenti praebeat hic calculus candide agnovit Hugenius, quod adversarii supprimunt quantum possunt et alia prorsus agunt, calculo differentiali proprio in toto suo scripto non attingentes tantumque in seriebus infinitis haerentes quarum methodum prae aliis aemulum provexisse nemo negat. Quae enim sub aenigmate[44] dixerat et tandem explicuit, de Fluxionibus et Fluentibus loquuntur, id est de quantitatibus finitis, et eorum elementis infinite parvis, sed quomodo unum ex alio derivandum sit, nec minimum adjumentum praebent. Et dum ille rationes nascentes aut evanescentes considerat, prorsus a differentiali calculo abducit ad methodum exhaustionum, quae longe diversa est (etsi suas quoque utilitates habeat) nec per infinite parvas, sed ordinarias quantitates procedit, etsi in illis desinat.

Cum ergo adversarii neque ex Commercio Epistolico quod edidere, neque aliunde vel minimum indicium protulerint, unde constet aemulum tali calculo usum ante edita a nostro; ab his allata omnia ut aliena sperni possunt. Et usi sunt arte rabularum, ut judicantes a re de qua agitur ad alia diverterent, nempe ad series infinitas. Sed in iis nihil afferre potuerunt, unde Nostri candor gravaretur: nam ipse ingenue professus est, per quem in illis profecisset; sed tamen ibi quoque ad aliquid excelsius generaliusque tandem pervenit.

Anmerkungen.

[1]) Die *Acta Eruditorum Lipsiensia,* die erste wissenschaftliche Zeitschrift Deutschlands, nach dem Muster des *Journal des Sçavans* durch einen Verein Leipziger Gelehrten gegründet, erschienen zuerst 1682. Leibniz nahm sogleich anfangs den lebhaftesten Antheil an dem Gedeihen dieses Instituts; ja er legte so grossen Werth darauf, dass sie ihm überall auf seinen Reisen nachgeschickt werden mussten. Fast in allen Jahrgängen finden sich Abhandlungen von ihm. Bei seinen Streitigkeiten mit den Cartesianern und später mit den Anhängern Newton's fand sich hier die beste Gelegenheit zu baldigen Erwiederungen. Besonders für die schnelle Verbreitung der Differentialrechnung war diese Zeitschrift von höchstem Nutzen. Ueber die Gründung und Geschichte dieses Journals siehe Prutz Geschichte des deutschen Journalismus Theil 1. S. 275 ff.

[2]) Wahrscheinlich die Abhandlungen der Berliner Akademie, die unter dem Titel: *Miscellanea Berolinensia, quae sunt ad incrementum Scientiarum ex scriptis Societatis Regiae exhibitis edita,* seit 1710 erschienen.

[3]) Christian Huygens, lat. *Hugenius* (geb. 1629, gest. 1695), ein Holländer von Geburt, der auf Einladung Ludwigs XIV. längere Zeit in Paris verweilte, um zum Aufblühen der daselbst neu gegründeten Akademie beizutragen. Hier wurde Leibniz mit ihm bekannt und machte unter seiner Anleitung die ersten Studien in der höhern Geometrie. Von dem innigen Verhältniss, welches seit dieser Zeit zwischen Huygens und Leibniz stattfand, enthält namentlich die vorliegende Abhandlung die schönsten Beweise. — Huygens war ein treuer Anhänger der alten Geometrie, die er sogar nicht verliess, als durch die

Entdeckung der höhern Analysis bequemere Methoden gefunden waren. Eine ziemlich ausführliche Lebensbeschreibung dieses ausgezeichneten Mathematikers, dessen Newton stets mit dem Beinamen des Grossen *(summus Hugenius)* gedenkt, findet sich in *Montucla hist. des math. éd. sec. Tom. II. p.* 415 *sqq.* und eine übersichtliche Darstellung seiner Entdeckungen giebt Chasles in der Geschichte der Geometrie, deutsch von Sohncke S. 98 ff.

[4]) Joh. Wallis, Professor der Geometrie zu Oxford (geb. 1616, gest. 1703) bekannt als Verfasser der *Arithmetica infinitorum, Oxon.* 1655, in welcher er vermittelst der Methode des Untheilbaren *(indivisibilia)* Cavaleri's und durch Summirung unendlicher Reihen viele Quadraturen u. s. w. ausgeführt hat.

[5]) Ehrenfried Walter v. Tschirnhausen (geb. 1651, gest. 1708) stammte aus einem vornehmen böhmischen Geschlechte, war sächs. Geh. Rath und Mitglied der französischen Akademie. Er entdeckte fast gleichzeitig mit Huygens die Eigenschaften der Brennlinien. Sein Hauptwerk ist: *Medicina mentis, sive tentamen genuinae logicae, in qua disseritur de methodo detegendi incognitas veritates. Amst.* 1686. 4.

[6]) Nicolaus Mercator (sein eigentlicher Name war wahrscheinlich Kramer), ein Holsteiner, begab sich um das Jahr 1660 nach London und blieb daselbst bis zu seinem Tode. Von seinen Schriften ist die wichtigste: *Logarithmotechnia, Lond.* 1668, in welcher er zuerst den Ausdruck $\frac{1}{1+a}$ durch Division in eine unendliche Reihe entwickelte. Das Weitere siehe *Montucla hist. des math. Tom. II. p.* 356 *sqq.*

[7]) Isaac Newton (geb. 1642, gest. 1727) der grösste Mathematiker der neuern Zeit, der Erfinder der Fluxionsrechnung und deshalb der Rival *(aemulus)* Leibnizens in Bezug auf die Entdeckung der Differentialrechnung. Als junger Mann schon fand er den binomischen Lehrsatz mit seinen vielfachen Anwendungen, und erweiterte dadurch das Gebiet der Reihen und deren Gebrauch auf das glänzendste. Darauf entdeckte er das Princip der Fluxionen, indem er den Flächeninhalt der Curven als eine wachsende oder stetig fliessende Grösse betrachtete, die im Verhältniss der Länge der Ordinate zunimmt, während die Abscisse als gleichförmig im Verhältniss der Zeit wachsend vorausgesetzt wird. Die Geschwindigkeiten, mit wel-

chen jede Grösse erzeugt wird, nannte Newton *Fluxionen,* und die Grössen selbst *Fluenten (quantitates fluentes),* und bezeichnete jene durch die Buchstaben für die Fluenten mit darüber gesetzten Punkten. Dem aufmerksamen Beurtheiler kann es nicht entgehen, dass Newton die Fluxionsrechnung fand, indem er auf dem von Cavaleri, Wallis, Barrow eingeschlagenen Wege fortschritt, während Leibniz durch arithmetische Betrachtungen zur Entdeckung der Differentialrechnung gelangte. — Das Hauptwerk Newton's ist: *Philosophiae naturalis principia mathematica,* das zuerst im Jahre 1686 erschien und über die Bewegung der Körper, namentlich der Himmelskörper, handelt.

[8]) Joh. Kepler (geb. 1561, gest. 1631) hat sich durch seine Entdeckungen auf dem Gebiete der Astronomie unsterblich gemacht. Vermöge seines reich begabten Talentes leistete er aber auch im Bereich der übrigen mathematischen Wissenschaften Vorzügliches. Der Zwist mit einem Weinhändler über den Inhalt einiger Fässer Wein gab ihm Veranlassung, das Mass körperlicher Räume zu studiren. Kepler begnügte sich jedoch nicht in dem dadurch entstandenen Werke: *Nova stereometria doliorum vinariorum, imprimis austriaci, figurae omnium aptissimae, et usus in eo virgae cubicae compendiosissimus et plane singularis. Accessit stereometriae Archimedeae supplementum. Lincii* 1615. *fol.* das Visiren der Fässer auf bestimmte Regeln zurückzuführen, und den Inhalt der Körper, nach welchen die gewöhnlich vorkommenden Fässer geformt sind, zu finden, sondern er machte zugleich die Geometer seiner Zeit auf eine grosse Anzahl neuer Probleme aufmerksam; die Bestimmung des Inhalts neuer Körper betreffend, die er durch Bewegung sphärischer und konischer Flächen um Durchmesser, Axen, Ordinaten u. s. w. entstehen liess. Wiewohl die Lösung der meisten dieser Probleme bei dem damaligen Zustande der Geometrie unmöglich war, und Kepler selbst nur die leichtesten zu lösen vermochte, so wollte er doch nicht bloss diese Probleme vorgelegt haben, sondern auch neue Gesichtspunkte aufstellen, durch welche vielleicht einst ihre Lösung möglich würde. In diesem Bezuge fügte er seinem Werke das *Supplementum stereometriae Archimedeae* hinzu, in welchem er die strenge Exhaustionsmethode Archimed's in eine leichtere und bequemere Methode zu verwandeln suchte. Unbekümmert um die strenge Form der Beweise hat er bloss den Geist derselben

(*mihi sensus hic esse videtur*, sagt er) aufgefasst und betrachtet geradezu, um z. B. das Verhältniss der Peripherie zum Durchmesser zu finden, den Umfang des Kreises aus unendlich vielen Punkten zusammengesetzt, von denen jeder die Basis eines Dreiecks bildet, deren Spitzen im Mittelpunkt zusammentreffen.

[9]) Bonaventura Cavaleri, Professor der Mathematik zu Bologna (geb. 1598, gest. 1647), richtete seine Aufmerksamkeit besonders auf die von Kepler vorgelegten Probleme. Er begriff sehr bald, dass zu ihrer Lösung an die Stelle der bisher immer angewandten Exhaustionsmethode ein anderes Verfahren gesetzt werden müsse, das im Allgemeinen mit ihr zusammenfiele, aber auf einfacheren Principien beruhte und auf jeden einzelnen Fall gleichmässig angewandt werden könnte. Ein solches Verfahren hat er in seinem Werke: *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota. Bonon.* 1635 entwickelt. Cavaleri denkt sich jede Fläche und jeden Körper beziehungsweise durch parallele Linien oder Flächen begränzt, die er *regulae* nennt. Wird nun die eine dieser parallelen Linien oder Flächen beweglich gedacht, so wird sie bei einer Bewegung bis zur zweiten hin die Fläche oder den Körper ganz durchlaufen oder beschreiben, wie z. B. der Kreis den Cylinder, ein Vieleck einen prismatischen Körper beschreiben wird. Anstatt die Flächen oder Körper zu betrachten, betrachtet jetzt Cavaleri das durch die Bewegung der Regeln erhaltene Netz von Linien und Flächen, und die Eigenschaften, die diese Aggregate von Linien oder Flächen haben, werden auch den Flächen oder Körpern zukommen. Diese durch die Bewegung der Regeln entstandenen Netze von Linien oder Flächen bezeichnet Cavaleri mit dem Namen *indivisibilia*. — Diese Methode Cavaleri's macht Epoche in den Untersuchungen der höhern Geometrie. Sie blieb bis auf Leibniz das einzige Mittel zur Quadratur von Flächen und zur Cubirung körperlicher Räume.

[10]) Peter Fermat, Parlamentsrath zu Toulouse (geb. 1590, gest. 1663), ist namentlich durch die von ihm aufgestellten Theoreme über die Eigenschaften der Primzahlen berühmt geworden. Leibniz gedenkt hier seiner wegen der Methode *de inveniendis maximis et minimis*. (Das Nähere hiervon in Klügel's math. Wörterbuch Theil 1. S. 828 ff.). Von dieser

Methode haben die Coryphäen unter den französischen Mathematikern, Laplace, Lagrange und Fourier, Veranlassung genommen, ihren Landsmann Fermat als den *„premier et véritable inventeur“* der Differentialrechnung zu betrachten. Dem unbefangenen Leser entgeht indessen nicht, dass das Fermatsche Verfahren jedes Algorithmus entbehrt und nur auf ganze rationale Functionen unmittelbar anwendbar ist. Am treffendsten lässt sich jene Behauptung mit folgenden Worten Leibnizens aus dem ersten Entwurfe zurückweisen: *Et licet nostris temporibus insignes viri Keplerus, Cavalerius, Fermatius, Hugenius, Wallisius, Wrennus, Jac. Gregorius, Barrovius ac novissime Newtonus sub indivisibilium vel infinite parvorum, nascentium aut evanescentium quantitatum rationumve, vel denique sub fluxionum nomine rem considerassent multaque scitu digna inde eruissent, modum tamen non habuere, per quem ad calculum revocari posset.*

[11]) Unter *Algorithmus calculi* versteht Leibniz sowohl die von ihm eingeführte Bezeichnung der Differentiale, als auch die Rechnungsoperationen der Differentialrechnung. Ueber Algorithmus im Allgemeinen siehe Klügel's math. Wörterb. Theil 1. S. 68.

[12]) François Viete, *maître-de-requêtes* am Hofe Heinrichs IV. (geb. 1540, gest. 1603), einer der vorzüglichsten Mathematiker seiner Zeit, dessen ausgezeichnete Verdienste durch die unmittelbar nach ihm lebenden grossen Männer etwas verdunkelt wurden. Ihm verdankt namentlich die Algebra ihre gegenwärtige Gestalt, indem derselbe an die Stelle der bis dahin gebräuchlichen Zahlencoefficienten Buchstaben einführte. Bossut's Geschichte der Mathematik, deutsch von Reimer. Theil 2. S. 7 ff.

[13]) René des-Cartes (geb. 1596, gest. 1650) brachte zuerst in ausgedehnterem Masse die Algebra mit der Geometrie in Verbindung, und schuf die Geometrie der Curven. Ueber die Verdienste Vieta's und Descartes' um diese Disciplin siehe Bossut's Geschichte Theil 2. S. 30 ff. Chasles Geschichte der Geometrie S. 49.

[14]) Leibniz stellt hier die *Geometria communis seu Apolloniana* der *Geometria Archimedea* gegenüber. Unter jener versteht er nämlich die Geometrie der einfachsten krummen Linien (deshalb auch *Apolloniana* genannt, von Apollonius

von Pergä, dem Verfasser des berühmten Werkes über die Kegelschnitte); die *Geometria Archimedea* umfasst alsdann die Curven höherer Grade und transcendenter Natur, besonders die Quadratur derselben. Archimedes untersuchte bekanntlich zuerst die Eigenschaften der Spirale.

[15]) David Gregory, Neffe des Jacob Gregory, lehrte um 1690 zu Edinbourg, darauf zu Oxford. Er war ein Freund Newton's. — Ueber den Zusatz: *Catenariam affectante,* siehe *Leibn. op. omn. ed. Dutens Tom. III. p.* 355 *sqq.*

[16]) Dieser *Mathematicus primarius* ist Joh. Bernoulli. Bossut's Geschichte. Theil 2. S. 219.

[17]) Ueber diese logischen Studien spricht Leibniz in dem ersten Entwurfe ausführlicher: *Adhuc sub magistris Logicam ipsam ad parem arithmeticae certitudinem transferre conabatur. Observaverat aliquando ex prima figura deduci posse secundam et tertiam, non adhibitis conversionibus (quae ipsae demonstratione indigere ei videbantur) sed solo adhibito principio contradictionis; Conversiones autem ipsas demonstrari posse ope figurae secundae et tertiae, adhibitis propositionibus identicis; ac tum demum demonstrata jam conversione ejus ope etiam demonstrari posse figuram quartam; eamque adeo esse prioribus indirectiorem. Hanc autem vim veritatum identicarum maxime mirabatur, nam vulgo videntur esse nugatoriae et inutiles. Sed postea animadvertit totam Arithmeticam et Geometriam ex veritatibus identicis nasci, et generaliter omnes veritates a ratione pendentes indemonstrabiles, esse identicas, quae combinatae cum definitionibus producant veritates identicas. Hujusque analyseos elegans exemplum dabat in demonstratione theorematis, quod totum sit magis parte.*

[18]) Montucla *(hist. des math. Tom. II. p.* 76*)* nennt den Jesuiten Vincent Leotaud nur den Herausgeber des Buches: *Amoenior curvilineorum contemplatio, Lugd.* 1654, 4, dessen Verfasser ein Bischof von Gap, Namens de Lyonne, war.

[19]) Der vollständige Titel dieser Schrift ist: *Nova Hypothesis Physica, qua Phaenomenorum Naturae plerorumque causae ab unico quodam universali Motu in Globo nostro supposito repetuntur. Seu Theoria Motus Abstracti et Concreti. Moguntiae* 1672 *in* 12. Ueber den Inhalt derselben siehe das Leben Leibnizens von Guhrauer. Theil 1. S. 73 ff.

[20]) Heinrich Oldenburg war in London während

Cromwell's Herrschaft Consul seiner Vaterstadt Bremen. Als er sein Amt verloren hatte und Mittel zu seiner Subsistenz suchen musste, wurde er Tutor eines englischen Edelmannes, den er 1656 nach Oxford begleitete. Während seines Aufenthalts in dieser Stadt wurde er mit den Gelehrten bekannt, welche die königliche Societät zu London stifteten, und wurde im Jahre 1663 zugleich mit Wilkens deren zweiter Secretär. Er starb zu Charlton im Jahre 1677. (Brewster, das Leben Newton's, deutsch von Goldberg und Brandes. S. 163).

[21]) Robert Boyle (geb. 1626, gest. 1691), ein ausgezeichneter Physiker und Chemiker. Er untersuchte fast gleichzeitig mit Otto v. Guerike die Elasticität der Luft, und brach namentlich in der Chemie eine neue Bahn.

[22]) Joh. Pell (geb. 1610, gest. 1685), ein angesehener Mathematiker in England und eins der ersten Mitglieder der königlichen Societät zu London. Er gab eine Auflösung der Gleichung $x^2 = ay^2 + 1$ in ganzen Zahlen, die Euler in seine Algebra aufgenommen hat.

[23]) Joh. Collins (geb. 1624, gest. 1685), ein Mathematiker, der sich weniger durch eigene Arbeiten um die Wissenschaft verdient gemacht hat, als dadurch, dass er Anderen Rath ertheilte und zum Fleiss aufmunterte. Er stand mit den gelehrtesten Männern in und ausser England in Briefwechsel, und gab als Mitglied der königlichen Societät Oldenburg Auskunft auf die Anfragen Leibnizens über mathematische Gegenstände. Daher kam es denn auch, dass in dem Streite über den ersten Erfinder der Differentialrechnung Collins veranlasst wurde, seine Correspondenz zu veröffentlichen, die unter dem Titel: *Commercium epistolicum Joh. Collinsii et aliorum de Analysi promota, jussu Societatis regiae in lucem editum. Lond.* 1712. erschien.

[24]) Jacob Gregory, Professor zu St. Andrews in Schottland (geb. 1636, gest. 1675), ein Rival Newton's sowohl in der Entdeckung des Spiegelteleskops, als in der höhern Geometrie, besonders was die Anwendung der Reihen betrifft. *Montucla hist. des math. Tom. II. p.* 86. 376.

[25]) Der Jesuit Honoratus Fabri, ein geschickter Mathematiker, schrieb über die Cycloide, über die Bewegung und über mehrere astronomische Gegenstände. Sein von Leibniz angeführtes Werk finde ich nirgends erwähnt.

[26]) Gregorius a St. Vincentio (geb. 1584 zu Brügge, gest. 1667) lebte abwechselnd zu Rom, Prag und in seinem Vaterlande. Er wird von Leibniz oft erwähnt und hoch geschätzt. Sein Hauptwerk ist: *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni. Antwerp.* 1624, das von Montucla als eine Fundgrube wichtiger geometrischer Entdeckungen gepriesen wird, obwohl Gregorius in der Hauptsache, der Auffindung der Quadratur des Kreises, sich irrte.

[27]) Blaise Pascal (geb. 1623, gest. 1662). Das von Leibniz hier angezogene Buch sind wahrscheinlich die Briefe, die Pascal unter dem Namen Dettonville an einen Herrn de Carcavi über die Auflösungen seiner Aufgaben über die Eigenschaften der Cycloide schrieb. Sie sind in der von Bossut veranstalteten Sammlung seiner Werke aufgenommen.

[28]) Guldinus (geb. 1577 zu St. Gallen, ward Jesuit, lehrte zu Rom, Gräz und Wien die Mathematik, gest. 1643) hat in seinem Werke: *Centrobaryca*, das von 1635 bis 1642 erschien, ein neues, jedoch nicht allgemein anwendbares Verfahren aufgestellt, mittelst des Schwerpunktes Flächen zu quadriren, das nach ihm die Guldin'sche Regel genannt wird. Die Grundzüge desselben finden sich jedoch schon in der Vorrede zum 7. Buch der mathematischen Sammlungen des Pappus.

[29]) Christoph Wren (geb. 1632, gest. 1723), der berühmte Erbauer der St. Paulskirche zu London und zugleich einer der ersten Mathematiker seiner Zeit, löste einen Theil der von Pascal vorgelegten Aufgaben über die Cycloide, namentlich bestimmte er zuerst die Länge eines Bogens dieser krummen Linie.

[30]) Van Heuraet, ein Holländer, und William Neil, ein Engländer, fanden fast gleichzeitig die erste Rectification einer krummen Linie. Es war eine der cubischen Parabeln mit der Gleichung $y^3 = ax^2$.

[31]) Isaac Barrow (geb. 1630, gest. 1677), der Lehrer und Vorgänger Newton's als Professor der Mathematik zu Cambridge, hat namentlich durch eine Methode, Tangenten an krumme Linien zu ziehen, die in seinen *Lectionibus geometricis, Lond.* 1675, entwickelt ist, einen grossen Ruf als Mathematiker sich erworben. Ueber Barrow's Methode siehe Klügel's math. Wörterb. Theil 1. S. 283 f.

[32]) *Tetragonismus* bedeutet Quadratur.

[33]) In der Gleichung $x = 2zz :, 1 + zz$ vertritt das Komma nach dem Divisionszeichen die jetzt gebräuchlichen Klammern, so dass dieselbe gegenwärtig geschrieben wird $x = 2zz : (1 + zz)$. Ebenso wird die folgende $y = \pm zz \mp 1, :, zz + 1$ nach der heutigen Bezeichnungsart geschrieben $y = (\pm zz \mp 1) : (zz + 1)$. Was die Herleitung der Gleichung $x = 2zz :, 1 + zz$ betrifft, so ist in Fig. 2. $A\Theta = Y\Theta$ und $AN = YM = AX$. Denkt man sich nun CY gezogen, so ist $\Delta AN\Theta \backsim YXC$, folglich $A\Theta : AN = YC : YX$, oder $A\Theta : x = 1 : \sqrt{2x - xx}$, folglich wenn $A\Theta = z$, $z^2 = \frac{x}{2 - x}$ oder $x = \frac{2z^2}{1 + z^2}$.

[34]) Ueber diese *Methodus transmutationum* handelt ein Brief Leibnizens an Oldenburg vom 27. Aug. 1676. *Leibn. op. omn. ed. Dutens. Tom. III. p.* 48 *sqq.*

[35]) Der hier erwähnte Brief Huygens' an Leibniz ist vom 7. Nov. 1674 und findet sich gedruckt in *Ch. Hugenii aliorumque seculi XVII virorum celebrium exercitationes mathematicae ed. Uylenbroeck. Tom. I. p.* 6.

[36]) Diese beiden Briefe vom 25. Jul. und 26. Oct. 1674 finden sich in *Leibn. ep. Tom. III. p.* 27 *sqq.*

[37]) Diese von Leibniz so oft erwähnte Abhandlung, die er in Folge der Entdeckung der oben angeführten Reihe verfasste, findet sich vollständig ausgearbeitet unter seinen Manuscripten mit dem Titel: *De quadratura arithmetica Circuli, Ellipseos et Hyperbolae, cujus Corollarium est Trigonometria sine tabulis.*

[38]) Joh. Hudde (geb. 1640, gest. 1704), Bürgermeister zu Amsterdam, ein ausgezeichneter Mathematiker, von dessen Erfindungen jedoch nur einige Bruchstücke durch Schooten als Anhang zur Geometrie des Descartes herausgegeben sind. *Montucla hist. des math. Tom. II. p.* 150.

[39]) Ueber das arithmetische Dreieck sieh. Klügel's math. Wörterbuch. Theil 1. S. 186 ff.

[40]) In dem ersten Entwurfe stellt Leibniz das harmonische Dreieck so dar:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & \frac{1}{1} & & & & & & & \\
 & & & & & & \frac{1}{1} & & \frac{1}{1} & & & & & & \\
 & & & & & \frac{1}{1} & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{1} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{1} & & & & \\
 & & & \frac{1}{1} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{1} & & & \\
 & & \frac{1}{1} & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{10} & & \frac{1}{10} & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{1} & & \\
 & \frac{1}{1} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{15} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{15} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{1} & \\
\frac{1}{1} & & \frac{1}{7} & & \frac{1}{21} & & \frac{1}{35} & & \frac{1}{35} & & \frac{1}{21} & & \frac{1}{7} & & \frac{1}{1}
\end{array}$$

und setzt hinzu: *In triangulo harmonico quaevis series (sed per datam constantam multiplicata) est summatrix sequentis et differentialis praecedentis, hoc modo*

$$\begin{array}{lllllllll}
 & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \text{ etc.} \\
\frac{1}{2} \text{ in,} & \frac{1}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} & \frac{1}{21} & \frac{1}{28} \text{ etc.} & \\
\frac{2}{3} \text{ in,} & \frac{1}{1} & \frac{1}{4} & \frac{1}{10} & \frac{1}{20} & \frac{1}{35} & \frac{1}{56} \text{ etc.} & & \\
\frac{3}{4} \text{ in,} & \frac{1}{1} & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & \frac{1}{35} & \frac{1}{70} \text{ etc.} & & & \\
 & \text{etc.} & & \text{etc.} & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllllllll}
\text{Nam} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\
\text{diffrae.} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} & \frac{1}{30} & \frac{1}{42} & \frac{1}{56} & \\
\text{seu } \frac{1}{2} \text{ in,} & \frac{1}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} & \frac{1}{21} & \frac{1}{28} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllllll}
\text{Et} & \frac{1}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} & \frac{1}{21} & \frac{1}{28} \\
\text{diffrae.} & \frac{2}{3} & \frac{2}{12} & \frac{2}{30} & \frac{2}{60} & \frac{2}{105} & \frac{2}{168} & \\
\text{seu } \frac{2}{3} \text{ in,} & \frac{1}{1} & \frac{1}{4} & \frac{1}{10} & \frac{1}{20} & \frac{1}{35} & \frac{1}{56} &
\end{array}$$

Hinc omnes series trianguli harmonici summari possunt, excepta prima sive numerum terminorum finitum sive infinitum assumas. Nam series prima in infinitum producta est quantitas infinita, caeterae licet in infinitum, sunt quantitates finitae.

41. In dem ersten Entwurfe setzt Leibniz an dieser Stelle hinzu: *Habebat ita Autor Methodum differentiandi seriem propositam, sed desiderabatur contra Methodus regrediendi seu data serie differentiarum inveniendi seriem terminorum, vel (quod idem est) data serie terminorum inveniendi seriem summatricem. Et quidem satis apparebat, regressus istos, saltem ordinario modo non semper esse possibiles. Sic divisio est regressus multiplicationis, sed non semper exacte procedit, veniendumque est ad fractiones. Similiter extractio radicum est reciprocum exaltationis ad potentiam; et cum non semper accurate procedat, veniendum est ad quantitates surdas. Eodem modo hic quoque non semper exacte haberi potest summatio, sed venien-*

dum est ad quantitates quas jam dudum autor appellavit transcendentes.

42. Gregorius a St. Vincentio nannte seine Methode zur Quadratur krummlinig begränzter Flächen *Ductus plani in planum.* Klügel's math. Wörterb. Theil 4. S. 88 f. Chasles Geschichte der Geometrie. S. 87.

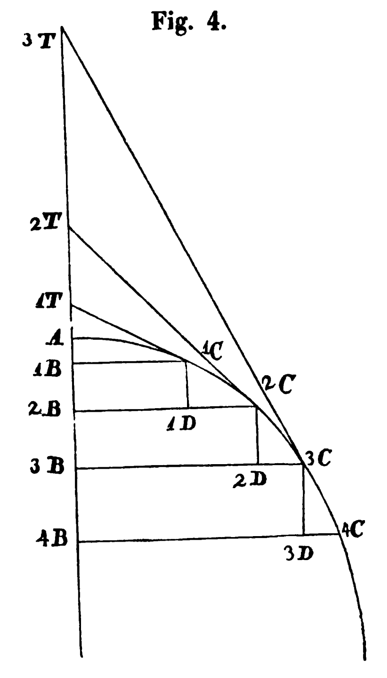
43. *Ungula* bedeutet hufförmiger Abschnitt, *cuneus* Keil.

44. Newton hatte Leibniz das Princip der Fluxionsrechnung in einem Buchstabenräthsel mitgetheilt. *Leibn. op. Tom. III. p.* 76.

Anhang.

Elementa calculi novi pro differentiis et summis, tangentibus et quadraturis, maximis et minimis, dimensionibus linearum, superficierum, solidorum, aliisque communem calculum transcendentibus.

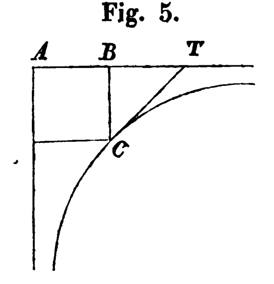
Fig. 4.



Sit linea CC (Fig. 4.), cujus axis AB, ordinatae ad axem normales BC, quae vocentur y, abscissae ex axe AB, quae vocentur x. Jam CD differentiae abscissarum vocentur dx, quales sunt ${}_1C_1D$, ${}_2C_2D$, ${}_3C_3D$ etc. At vero rectae ${}_1D\,{}_2C$, ${}_2D\,{}_3C$, ${}_3D\,{}_4C$ (differentiae scilicet ordinatarum BD) vocentur dy.

Si jam ponuntur ipsae istae dx et dy infinite parvae, seu quando puncta curvae distantiam habere intelliguntur quavis data minorem, id est si istae ${}_1D_2C$, ${}_2D_3C$ etc. considerentur ut incrementa momentanea lineae BC inter descendendum per AB continue crescentis, tunc patet rectam duo illa puncta jungentem, ut ${}_2C_1C$ (quae est elementum curvae seu latus polygoni infinitanguli quod pro curva habemus) productam donec axi occurrat in ${}_1T$, fore ipsam curvae tangentem, et erit ${}_1T_1B$ (intervallum inter ordinatam et tangentem in axe sumtum) ad ${}_1B_1C$ ordinatam, ut ${}_1C_1D$ ad ${}_1D_2C$, seu si ${}_1T_1B$, vel ${}_2T_2B$ etc. generaliter vocetur t, erit $t : y :: dx : dy$. Et itaque invenire differentias serierum est invenire tangentes. Ex. gr. quaeritur tangens Hyperbolae, cum sit y aequ. $\frac{aa}{x}$ (posita [in Fig. 5.]

Fig. 5.



x seu AB abscissa ex asymptota, et a latere potentiae seu rectanguli ABC), erit dy aeq. $-\frac{aa}{xx}dx$, ut mox patebit cum modum calculandi ostendemus, ergo $dx : dy$ seu $t : y$ *erit* $::$ $-xx : aa :: -x : \frac{aa}{x} :: -x : y$, ergo t aequ. $-x$, hoc est in Hyperbola erit BT aeq. AB, sed ob signum $-x$ non versus A, sed in contrarias partes sumenda. Porro differentiae sunt reciprocae summis, ita ordinatae sunt suarum differentiarum summae, sic ${}_4B_4C$ est summa omnium differentiarum, ut ${}_3D_4C$, ${}_2D_3C$ etc. usque ad A, etiamsi numero essent infinitae. Quod ita designo $\int dy$ aequ. y. Aream autem figurae designo per summam rectangulorum ex ordinatis in differentias abscissarum, ut ${}_1B_1D +$ ${}_2B_2D + {}_3B_3D$ etc. Nam exigua triangula ${}_1C_1D_2C$, ${}_2C_2D_3C$ etc. cum sint infinite parva respectu dictorum rectangulorum omitti possunt impune, itaque aream figurae calculo meo ita designo $\int ydx$, seu summam ex rectangulis cujusque y ducti in respondens sibi dx, ubi si dx ponantur inter se aequales habetur

Methodus indivisibilium Cavalerii. Nos autem altius assurgentes aream figurae inveniemus, si inveniamus figuram ejus summatricem sive quadratricem, cujus scilicet ordinatae sint ad ordinatas figurae datae ut summae ad differentias; exempli causa, sit figurae quadrandae datae curva *EE*, ejusque ordinatae *EB*, quas vocabimus *e*, sint differentiis ordinatarum *BC* seu ipsis *dy* proportionales, seu sit ${}_1B\,{}_1E : {}_2B\,{}_2E :: {}_1D\,{}_2C : {}_2D\,{}_3C$, et ita porro, vel sit ut $A\,{}_1B$ ad ${}_1B\,{}_1C$, sive ut ${}_1C\,{}_1D$ ad ${}_1D\,{}_2C$, sive ut *dx* ad *dy*, ita constans seu semper permanens recta *a* ad ${}_1B\,{}_1E$ sive *e*, fiet $dx : dy :: a : e$ seu *edx* aequ. *ady*. Ergo $\int e\,dx$ aequ. $\int a\,dy$. Est vero *edx* idem quod *e* in *dx* respondentem, ut rectang. ${}_3B\,{}_4E$, quod fit ex ${}_3B\,{}_3E$ in ${}_3B\,{}_4B$, ergo $\int edx$ erit summa talium rectangulorum ${}_3B\,{}_4E + {}_2B\,{}_1E + {}_3B\,{}_2E$ etc. quae summa est ipsa area figurae $A\,{}_4B\,{}_4EA$ positis ipsis *dx* seu ordinatarum *e* sive *BE* intervallis infinite parvis, porro *ady* est rectang. ex *dy* ut ${}_3D\,{}_4C$ in constantem *a*, et summa horum rectangulorum, nempe $\int ady$ sive ${}_3D\,{}_4C$ in $a + {}_2D\,{}_3C$ in $a + {}_1D\,{}_2C$ in *a* etc. idem est quod ${}_3D\,{}_4C + {}_2D\,{}_3C + {}_1D_2C$ etc. in *a*, hoc est idem quod ${}_4B\,{}_4C$ in *a*, ergo $\int ady$ aequ. $a\int dy$ seu *ay*. Habemus ergo $\int edx$ aequ. *ay*, hoc est area $A\,{}_4B\,{}_4EA$ aequabitur rectangulo sub ipsa ${}_4B\,{}_4C$ et constante *a*, et generaliter area *ABEA* aequ. *BC* in *a*. Tantum ergo ad quadraturas opus est data linea *EE* invenire lineam *CC* summatricem, et quidem semper calculo inveniri potest, an talis linea haberi possit communi Geometria, an vero sit Transcendens, quae calculo Algebraico exprimi non potest, de quo alibi. Ex his autem jam infinita pulchra theoremata partim ab aliis maxime Anglis Batavisque inventa partim non inventa duci possent et quidem solo calculo, nullo propemodum imaginationis labore. *Triangulum* autem ad lineam, quale est ${}_1C\,{}_1D\,{}_2C$, voco *characteristicum* lineae, quia ejus ope potissima inveniri possunt circa lineam theoremata, quae videntur admirabilia, ut ejus dimensio, superficies, solidaque rotatione genita, centra gravitatis, quia ${}_1C_2C$ aequ. $\sqrt{dx\,.\,dx + dy\,.\,dy}$. Hinc statim habetur modus inveniendi curvae dimensionem ope alicujus quadraturae, ex. gr. in parabola, si sit *y* aequ. $\frac{xx}{2a}$, erit *dy* aequ. $\frac{xdx}{a}$, unde ${}_1C_2C$ erit $\frac{dx}{a}\sqrt{aa + xx}$, est ergo ${}_1C\,{}_1C$ ad *dx* ut ordinata Hyperbolae $\sqrt{aa + xx}$ ad constantem *a* seu $\frac{1}{a}\int dx\sqrt{aa + xx}$, recta aequalis

curvae parabolae pendet ex quadratura Hyperbolae, ut jam ab aliis inventum habetur. Et ita calculo exprimuntur inventa pulcherrima Hugenii, Wallisii, Heuratii et Neilii. Supra dixi esse: $t : y :: dx : dy$. Ergo erit tdy aequ. ydx, ergo $\int tdy$ aequ. $\int ydx$. Haec aequatio in lineis enuntiata dat theorema elegans Gregorii, nempe sit angulus BAF rectus, et sint AF aequales ipsis BC, et FG parallelae ipsi AB et aequales ipsis BT, nempe ${}_1F_1G$ ipsi ${}_1B_1T$, erit $\int tdy$ seu summa rectangulorum ex t, verb. gr. ${}_4F_4$G (seu ${}_4B_4T$) in dy seu ${}_3F_4F$ (seu ${}_3D_4C$) hoc est rectang. ${}_4F_3G + {}_3F_2G + {}_2F_1G$ etc. seu *area figurae* $A\,{}_4F_4GA$ aequalis ipsi $\int ydx$ seu figurae $A\,{}_4B_4CA$ et generaliter $AFGA$ aequ. $ABCA$. Vicissim alia, quae ex figurae inspectione statim patent, ex calculo etiam facile deducuntur, ex. gr. quod in trilineo ut $ABCA$ figura $ABCA$ cum figura complementali $AFCA$ aequatur rectangulo $ABCF$, nam calculus mox ostendet quod $\int ydx + \int xdy$ aequ. xy. Si quis quaerit solidum rotatione circa axem factum, tantum quaerere potest $\int \overline{_{c}yydx}$; pro solido circa basin $\int \overline{_{c}xxdy}$; pro momento ex vertice $\int \overline{yxdx}$, quae serviunt ad invenienda centra gravitatis figurarum et exprimunt ungulam Gregorii a S. Vincentio et quae deinde Pascalius, Wallisius, Lalovera, aliique circa haec invenere. Nam et si quis quaerat centra linearum, et superficies earum rotatione generatas, ex. gr. superficiem lineae AC circa AB rotatae, tantum quaerere debet $\int \overline{y\sqrt{dx\,dx + dy\,dy}}$ seu summa omnium PC ad axem applicatarum in punctis respondentibus B, ita ${}_2P_2C$ applicabitur axi AB normaliter ad ${}_2B$, unde fit figura, cujus area est illa ipsa summa. Itaque res statim reducet ad quadraturam figurae alicujus planae, si pro y et dy substituat valorem ex natura ordinatarum et tangentium curvae. Ita pro parabola sit y aequ. $\sqrt{2ax}$, erit dy aequ. $\frac{adx}{y}$ ut mox patebit, ergo prodidit $\int \overline{y\sqrt{dxdx + \frac{aa}{yy}dxdx}}$ seu $\int \overline{dx\sqrt{yy + aa}}$ seu $\int \overline{dx\sqrt{2ax + aa}}$ quod pendet ex quadratura parabolae (est enim omnium $\sqrt{2ax + aa}$ seu PC locus ad parabolam posito AC esse parabolam, AB ejus axem, licet tum deberet figura immutari et curva axi concavitatem obvertere) quae cum habeatur ex communi Geometria, habebitur et circulus superficiei conoeidis parabolici aequalis; quae prolixe deducere non est

hujus loci. Haec autem quae magna videri possunt, sunt tantum facillima calculi hujus corollaria. Multa enim majora hinc sequuntur, nec ullum facile problema sive in Geometria pura, sive ad Mechanicen applicata occurret, quod ejus vim plane effugiat.

Jam ipsius calculi Elementa exponamus.

Fundamentum calculi: Differentiae et summae sibi reciprocae sunt, hoc est summa differentiarum seriei est seriei terminus, et differentia summarum seriei est ipse seriei terminus, quorum illud ita enuntio: $\int dx$ aequ. x; hoc ita: $d\int x$ aequ. x.

Sit series differentiae		1	2	3	4	5	dx
series ipsa	0	1	3	6	10	15	x
seriei summae	0	1	4	10	20	35	$\int x$

Jam Termini seriei sunt summae differentiarum seu x aequ. $\int dx$, ita 3 aequ. $1+2$, et 6 aequ. $1+2+3$ etc. contra differentiae summarum seriei sunt ipsi seriei termini, seu $d\int x$ aequ. x, ita 3 est differentia inter 1 et 4, et 6 inter 4 et 10.

da aequ. 0, posito a esse quantitatem constantem quia $a-a$ est 0.

Additio et subtractio. Differentia vel summa seriei cujus terminus est conflatus per additionem vel subtractionem terminorum aliarum serierum, eodem modo ex harum serierum differentiis vel summis conflatur, seu $x+y-v$ aequ. $\int \overline{dx+dy-dv}$, $\int \overline{x+y-v}$ aequ. $\int x+\int y-\int v$. Res patet inspicienti, si quis tres series et cujusque summas et differentias exponat, et tali modo respondentes respondentibus inter se jungat. *Multiplicatio* simplex $d\overline{xy}$ aequ. $xdx+ydy$ *) seu xy aequ. $\int xdx+\int ydy$. Est id ipsum quod supra diximus figuram cum suo complemento aequari rectangulo circumscripto. Ex calculo ita demonstratur: $d\overline{xy}$ idem est quod differentia duorum xy sibi propinquorum quorum unum esto xy, alterum $\overline{x+dx}$ in $\overline{y+dy}$, fiet:

$d\overline{xy}$ aequ. $\overline{\overline{x+dx} \text{ in } \overline{y+dy}-xy}$ seu $+xdy+ydx+dxdy$ et omissa quantitate $dxdy$ quae infinite parva est respectu reliquorum, posito dx et dy esse infinite parvas (cum scilicet per seriei terminum lineae continue per minima crescentes vel decrescentes intelliguntur) prodibit $xdy+ydx$, signa tamen

*) ist offenbar nur ein Schreibfehler, denn oben steht das Richtige.

variantur, prout x et y simul crescunt, vel uno crescente alterum decrescit, quod notandum. *Divisio simplex.* $d\frac{y}{x}$ aequ. $\frac{xdy - ydx}{xx}$ nam $d\frac{y}{x}$ aequ. $\frac{y + dy}{x + dx} - \frac{y}{x}$ seu $\frac{xdy - ydx}{xx + xdx}$, ubi pro $xx + xdx$ scribendo xx, quia omitti potest xdx tanquam infinite parvum respectu ipsius xx fit: $\frac{xdy - ydx}{xx}$, et quidem, si esset y aequ. aa, foret dy aequ. 0, unde fieret $-\frac{aa\,dx}{xx}$, quo valore paulo ante pro tangente Hyperbolae usi sumus. Ex his jam facile quivis calculo ducere poterit *Multiplicationem* aut *Divisionem compositam*, ita $dxyv$ erit $xydv + xvdy + yvdx$, ita $d\frac{y}{vz}$ erit $\frac{zv\,dy - yv\,dz - yz\,dv}{vv \, . \, zz}$ quod demonstratur ex praecedenti, nam $d\frac{y}{x}$ aequ. $\frac{xdy - ydx}{xx}$, ubi pro x ponendo zv, et pro dx seu $d\overline{zv}$ ponendo $zdv + vdz$ per superiora, habebitur quod diximus. Sequuntur potentiae: dx^2 aequ. $2xdx$, et dx^3 aequ. $3xxdx$. Nam ponendo y aequ. x, et v aequ. x, pro dxx poterit scribi $d\overline{xy}$ hoc est (per superiora) $xdy + ydx$ seu (si x aequ. y, et per consequens dx aequ. dy) $2xdx$. Similiter pro dx^3 scribetur $d\overline{xyv}$, hoc est (per superiora) $xydv + xvdy + yvdx$ seu (y et v ponendo x et pro dy et dv ponendo dx) $3xxdx$. Q. E. D. Eodem modo in genere $d_{,}x^e$, erit aequ. $e \, . \, x^{\overline{e-1}}dx$ quemadmodum ex dictis non difficulter demonstratur. Hinc porro $d\frac{1}{x^h}$ aequ. $-\frac{hdx}{x^{\overline{h+1}}}$. Nam si $\frac{1}{x^h}$ aequ. x^e erit e aequ. $-h$, x^{e-1} aequ. $\frac{1}{x^{\overline{h+1}}}$, ut notum est naturas exponentium in progressione geometrica intelligenti. Atque hoc pro *fractis*. Idem procedit pro irrationalibus seu *Radicibus*, $d_{,}\sqrt[r]{x^h}$, aequ. $dx^{h:r}$ (per $h:r$ intelligo $\frac{h}{r}$ seu h divis. per r) seu $d_{,}x^e$, (posito e aequ. $\frac{h}{r}$) seu $e \, . \, x^{\overline{e-1}}dx$ per supra dicta seu (pro e reddendo $h:r$ et pro $e - 1$ ponendo $\overline{h - r : r}$) $\frac{h}{r} \, . \, x^{\overline{h-r:r}} . \, dx$ quod proinde erit aequ. $d_{,}\sqrt[r]{x^h}$,. Et his vicissim fiet $\int_{,} x^e . \, dx$, aequ. $\frac{x^{\overline{e+1}}}{e + 1}$ et $\int \frac{1}{x^e} . \, dx$, aequ. $-\frac{1}{\overline{e-1} \, . \, x^{\overline{e-1}}}$ et $\int_{,} \sqrt[r]{x^h} . \, dx$, aequ.

$\frac{r}{h+r}\sqrt[r]{}\,,x^{\overline{h+r:r}}\underline{\quad},$. Atque haec sunt calculi differentialis vel summatorii Elementa, secundum quem etiam formulae maxime compositae tractari possunt, tantum pro fracta vel irrationali quantitate, vel alia quavis, modo eam indefinita, hoc est x vel y, vel alia terminum alicujus seriei in genere exprimens, ingrediatur.

Cum*) prodiisset atque increbuisset Analysis mea infinitesimalis, quae calculum differentiarum et summarum complectitur, quidam scrupulos veteres movere coeperunt, quales Sceptici olim opposuere Dogmaticis, ut ex Empirici opere contra Mathematicos (id est dogmaticos) apparet, et Franciscus Sanchez autor libri quod nihil scitur, transmisit Clavio; et Cavallerio adversarii et Thomas Hobbes Geometris omnibus nuperque etiam Archimedi in quadratura parabolae v. cl. Dethlevus Cluverius objecere. Cum ergo Methodus nostra infinitesimalium, quae calculi differentiarum nomine innotuit, tum meis quibusdam speciminibus, tum egregiorum fratrum Bernoulliorum, inprimisque illustris ex Gallia viri Marchionis Hospitalii elegantibus scriptis celebrari coepisset, nuper quidam eruditus Mathematicus nomine dissimulato in Ephemeridibus literatis Trevoriensium, hanc methodum carpere visus est. Sed nominatim jam ante in me insurrexerat in Batavis Bernardus Nieuwentiit, a doctrina atque ingenio instructus sane, sed qui maluit hactenus retractando nostra, quam promovendo innotescere. Cumque ego introduxissem differentias non primas tantum, sed et secundas, et tertias aliasque ulteriores, inassignabiles seu ipsis differentibus incomparabiles, ipse primis contentus videri voluit; non considerans easdem esse difficultates in primis, et sequentibus, et ubi in ipsis primis superentur, etiam in secundis cessare. Ut taceam quemadmodum doctissimus juvenis Hermannus Basileensis ostendit, nomine, non re evitatas ab illo

*) Leibniz hat am Rande des Manuscripts bemerkt: *Totum hoc retractetur diligentius, ut publicari possit, omissis quae acriora in contradicentes. Jungatur mea methodus pro lege continuitatis ductu linearum exhibita, item schediasma quod Parisios miseram ut in vulgari exemplo ostenderem rationem inter nihila aliquem fingi.*

differentias sequentes, sed et in ipsarum primarum usu legitimo demonstrando, quo praestito aliquod saltem operae suae pretium fecisset, successu caruit, coactus delabi in doctrinas a nemine admittendas; quale illud est quod aliud efficiatur multiplicando 2 per m, quam multiplicando m per 2; posterius in aliquo casu esse impossibile, in quo possibile sit prius. Item quod quadratum aut cubus quantitatis sit non quantitas seu nihil.

In eo tamen laudandus omnino est, quod desiderat calculum infinitesimalem muniri demonstrationibus, ut scrupulis satisfiat, eamque operam a me dudum impetrasset facilius, nisi ex argutationibus passim inspersis animus apparuisset alienior ab eorum consuetudine, qui veritatem magis quam plausum et nomen quaerunt.

Mihi aliquoties propositum fuit, demonstrationibus firmare calculi nostri fundamenta, et subinde jam tum indicavi fontes eo consilio, ut cui otium sit, occupare hanc operam possit. Nondum tamen vidi, qui fecerit. Nam quod doctissimus Hermannus coepit agere in scripto contra Dn. Nieuwentiitium pro me edito, absolutum nondum est.

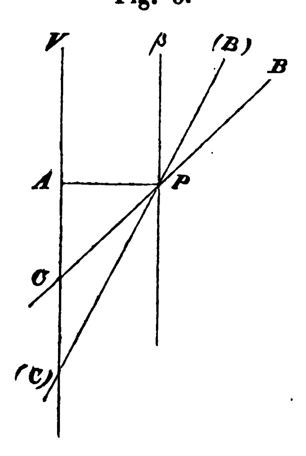
Est autem mihi praeter calculum mathematicum infinitesimalem usurpata etiam in physicis methodus, specimine olim illustrata in Novellis Reipublicae literariae; et utrumque complector *Lege continuitatis;* qua adhibita ostendi clarissimorum philosophorum Cartesii et Malebranchii Regulas motus pugnare secum ipsis.

Assumo autem hoc postulatum: *Proposito quocunque transitu continuo in aliquem terminum desinente, liceat ratiocinationem communem instituere, qua ultimus terminus comprehendatur.*

Exempli gr. si duo sint A et B, illud majus, hoc minus, et manente B, ponatur continue diminui A, donec aequalia fiant A et B, licebit ratiocinatione communi complecti tam casus priores, quibus A erat major, quam casum ultimum quo evanescente differentia A et B fiunt aequales. Similiter si duo corpora A et B sibi concurrant, ponaturque manente motu eodem ipsius B, continue imminui velocitatem ipsius A, donec ea omnino evanescat seu nulla fiat ipsius A celeritas, licebit casum hunc cum casu motus ipsius B una ratiocinatione complecti. Idem facimus in Geometria, cum duae rectae adhibentur

utcunque productae, una *VA* (Fig. 6.) positione data, seu

Fig. 6.



semper eodem situ manens, altera *BP* transiens per punctum datum *P* manenteque puncto *P* varians situm, et primum quidem convergens ipsi rectae *VA* eique concurrens in puncto *C*, deinde si angulus inclinationis, ut *BCA* continue minuatur, concurrens eidem in puncto aliquo remotiore *(C)*, donec tandem ex *BP* per *(B)P* perveniatur in *βP*, ubi recta per *P* transiens non convergit amplius ipsi *A*, sed ei est parallela et impossibile seu imaginarium fit punctum *C*. His positis licebit una aliqua ratiocinatione complecti tum casus omnes intermedios ut *(B)* tum ultimum β. Et hinc etiam fit, ut una ratiocinatione complectamur Ellipses et parabolam, veluti si consideretur *A* esse focum unum Ellipseos (cujus vertex *V* datus) qui focus maneat fixus, alterum focum *C* esse mutabilem dum transitur de Ellipsi in Ellipsin, donec tandem (in casu quo recta *BP* intersectione cum recta *VA* focum variabilem faciens) ipse focus *C* evanescat seu fiat impossibilis, quo casu Ellipsis in parabolam evanescit. Et ita licet ex nostro postulato parabolam una ratiocinatione cum Ellipsibus complecti. Hac methodo etiam Geometrae in constructionibus uti solent, cum scilicet diversos casus una constructione generali complectuntur, notando in certo casu convergentem rectam abire in parallelam angulo rectae ad aliam rectam evanescente.

Ex hoc autem postulato oriuntur quaedam locutiones commoditatis gratia adhibitae, quae videntur continere absur-

ditatem, sed significatione substituta cessantem. Nempe si de puncto concursus imaginario tanquam de quodam reali loquamur, uti in Algebra recepta radices imaginariae adhibentur. Et hinc analogiam servando dicimus Rectam *BP* cum in parallelam rectae *VA* desinit, esse convergentem ad ipsam, sive cum ea angulum facere, sed infinite parvum, perinde ac si diceretur corpus motum cum quietem desinit, velocitatem habere, sed infinite parvam; et rectam cum alteri aequalis fit inaequalem esse, sed differentia infinite parva, et parabolam esse Ellipsin ultimam, quae focum habeat infinite distantem a foco dato vertici dato propiore; vel in qua ratio *PA* ad *AC* sit infinite parva, sive angulus *BCA*.

Equidem verum est, quae omnino aequalia sunt, ea differentiam habere omnino nullam, et quae parallelae sunt rectae, eas nunquam concurrere, cum distantia ponatur ubique omnino aequalis; et parabolam non esse Ellipsin, aliaque id genus; fingi tamen potest ipse status transitus, seu evanescentiae, quo nondum quidem orta est aequalitas, aut quies, aut parallelismus, sed tamen in quo ad eam transitur; qui tam prope assumtus sit, ut discrimen sit omni assignabili minus; et in hoc statu manebit aliquod discrimen, aliqua velocitas, aliquis angulus, sed infinite parva; et distantia puncti concursus seu foci mutabilis a foco permanente erit infinita, et parabola poterit sub nomine Ellipsium (quemadmodum et alia ratione sub nomine Hyperbolarum) contineri, quoniam quae de tali parabola inveniuntur, ab iis quae de parabola rigorose dicta affirmari possunt, discrimen aliquod per constructionem aliquam assignabile non habent.

Et certe Archimedem et qui ei praeluxisse videtur, Cononem ope talium notionum sua illa pulcherrima theoremata invenisse credibile est, quae demonstrationibus ad absurdum deducentibus evicere, quibus simul et certitudinem manifestabant et artem occulebant. Unde eleganter alicubi notavit Cartesius, Archimedem velut Metaphysicam quandam exercuisse in Geometria (Caramuel Metageometriam appellaret) cujus artem vix quisquam veterum (demtis quadratricum tractatoribus) promovit; nostro tempore Cavallerius Methodum Archimedeam resuscitavit, aliisque longius eundi occasionem dedit. Et sane ipse Cartesius cum alicubi finxit circulum esse polygonum regulare infinitorum laterum, eaque ratiocinatione usus est,

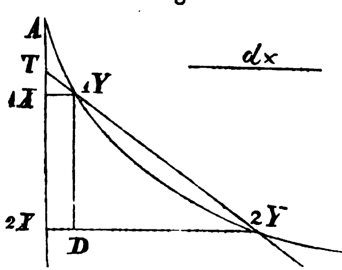
cum de Cycloide ageret; et Hugenius ipse in opere de Pendulo, cum soleret sua confirmare rigorosis demonstrationibus, nonnunquam tamen vitandae nimiae prolixitatis causa infinite parva adhibuit, quod etiam nuperrime cl. Lahirius fecit.

Interim an status ille transitionis momentaneae, ab inaequalitate ad aequalitatem, a motu ad quietem, a convergentia ad parallelismum, vel similis in sensu rigoroso ac metaphysico sustineri queat, seu an extensiones infinitae aliae aliis majores aut infinite parvae aliae aliis minores, sint reales; fateor posse in dubium vocari: et qui haec discutere velit, delabi in controversias Metaphysicas de compositione continui, a quibus res Geometricas dependere non est necesse. Equidem illud certum est posse aliquo modo concipi lineam interminatam et ei si ab una parte interminata sit posse aliquid utrinque terminatum adjici. Sed an recta hujusmodi unum totum sit quale in computum referri potest, seu an possit collocari inter quantitates, quibus in aestimando uti liceat, alia quaestio est, quam hoc loco discutere non est necesse.

Suffecerit itaque cum infinite magna (seu strictius infinita) et infinite parva (seu notarum nobis quantitatum infinitesima) dicimus, intelligi indefinite magna, et indefinite parva, id est tam magna quam quis velit, et tam parva quam quis velit, ut error quem aliquis assignat, sit minor quam quem ipse assignavit. Et cum generaliter appareat errore utcunque parvo assignato, ostendi posse adhuc minorem esse debere, sequitur errorem esse omnino nullum: simili fere argumentandi genere cum eo quo alicubi utuntur Euclides, Theodosius, aliique, quod quibus mirificum visum est, tamen verissimum negari non potuit, ut nempe ex eo ipso quod error assumitur, infertur error esse nullus. Et ita indefinite parvum vel infinite magnum, intelligitur utcunque magnum, vel utcunque parvum, ut ita se habeat veluti quoddam genus, non veluti aliquod ultimum in eo genere. Si omnino ultimum aliquod vel saltem rigorose infinitum quis intelligat, potest hoc facere, etsi controversiam de realitate extensorum aut generatim continuorum infinitorum aut infinite parvorum non decidat, imo etsi talia impossibilia putet; suffecerit enim in calculo utiliter adhiberi, uti imaginarias radices magno fructu adhibent Algebristae. Cum compendium ratiocinandi contineant, quod per methodum jam dictam semper rigorose verificari manifeste constat.

Sed placet rem paulo distinctius ostendere, ut calculi nostri differentialis Algorithmus (quem vocant) a me anno 1684 propositus, verissimus esse comprobetur. Et primum quod dicitur Elementum ipsarum y esse dy, quo sensu intelligi debeat, optime intelligitur adhibita tanquam linea aliqua AY ad rectam AX tanquam Axem relata (Fig. 7.). Curva AY sit parabola,

Fig. 7.

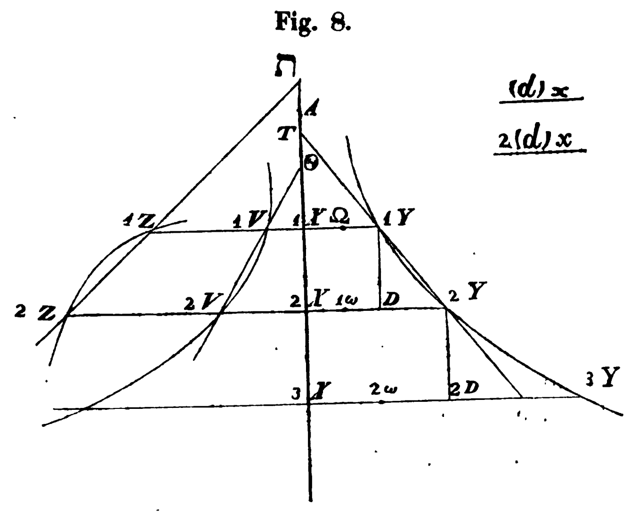


et assumtus Axis AX sit tangens parabolae in vertice A. Si AX vocetur x, et AY vocetur y, et latus rectum sit a, erit aequatio localis ad parabolam $xx = ay$, quae in quovis ejus puncto obtinet. Jam $A\,{}_1X$ sit x, et ${}_1X_1Y$ sit y, et ex puncto ${}_1Y$ in majorem aliquam ordinatam sequentem ${}_2X_2Y$ demittatur normalis ${}_1YD$, et ${}_1X_2X$, quae est differentia inter A_1X et A_2X vocetur dx; et similiter D_2Y quae est differentia inter ${}_1X_1Y$ et ${}_2X_2Y$, vocetur dy. Et quia $y = xx : a$, erit pari jure $y + dy = xx + 2x\,dx + dx\,dx, : a$ et demendo ab una parte y, ab altera $xx : a$, restabit $dy : dx = 2x + dy, : a$, quae est regula generalis, exprimens rationem differentiae ordinatarum ad differentiam abscissarum, seu producta chorda ${}_1Y_2Y$, donec axi concurrat in T, erit ratio ipsius ordinatae ${}_1X_2Y$ ad T_1X interceptam axis partem inter occursum et abscissam, ut $2x + dx$ ad a: jam quia ex postulato nostro licet una ratiocinatione complecti tum casum quo ordinata ${}_2X_1Y$, magis magisque admota ad permanentem ${}_1X_1Y$ tandem in ipsam incidit, patet hoc casu fore dx aequalem nihilo seu abjici debere, adeoque patet cum eo casu T_1Y sit tangens, ${}_1X_1Y$ ad T_1X ut $2x$ ad a. Hinc intelligitur in omni nostro calculo differentiali non esse opus ut dicantur aequalia quae discrimen habent infinite parvum, sed aequalia posse sumi, quae discrimen habent omnino nullum, modo calculus ponatur fieri generalis, tam pro casu quo discrimen est aliquod, quam quo nullum; et non nisi

calculo per abjectiones permissas et rationes quantitatum non evanidarum quantum licet purgato, postremo demum, ubi applicatio ad casum ultimum facienda est, differentia nulla ponatur. Similiter si fuisset $x^3 = aay$, fieret $x^3 + 3xx\,dx + 3x\,dx\,dx + dxdxdx = aay + aady$, seu abjectis utrinque $3xxdx + 3xdxdx + dxdxdx = aady$ vel $3xx + 3xdx + dx\,dx, : aa = dy : dx = {}_1X_1Y : T_1X$, unde cum differentia evanescit fit $3xx$ ad aa ut ${}_1X_1Y$ ad T_1Y. Quodsi velimus in calculo retinere dx et dy, ita ut significent quantitates non evanescentes etiam in ultimi casu, assumatur pro (dx) recta quaecunque assignabilis; et recta quae sit ad (dx) ut y seu ${}_1X_1Y$ est ad ${}_1XT$, vocetur (dy) ita dy et dx semper assignabiles erunt inter se ut D_2Y et D_1Y, quae in ultimo casu evanescunt. Ubi corrigendus est error in Actis Eruditorum d. l. pag. 467 lin. 10. nescio quomodo commissus, nam pro *VB* (*vel WC vel YD vel ZE*) poni debet *XB* (*vel XC vel XD vel XE*).

His positis omnes Regulae nostri Algorithmi in Actis Eruditorum mense Octobri anni 1684 propositae non magno negotio demonstrabuntur. Ad eundem Axem *AXX* (Fig. 8.) referantur curvae *YY*, *VV*, *ZZ*; et abscissis A_1X (nempe x) et A_2X (nempe $x + dx$) respondeant ordinatae ${}_1X_1Y$ (seu y) et ${}_2X_2Y$ (seu $y + dy$), item ordinatae ${}_1X_1V$ (seu v) et ${}_2X_2V$ (seu $v + dv$), item ordinatae ${}_1X_1Z$ (seu z) et ${}_2X_2Z$ (seu $z + dz$).

Fig. 8.



Chordae ${}_1Y_2Y$, ${}_1V_2V$, ${}_1Z_2Z$ productae occurrant respective in punctis T, Θ, $\sqcap$. Assumatur pro arbitrio recta quaecunque $(d)x$, manente puncto ${}_1X$, et puncto ${}_2X$ ipsi utcunque accedente, semper permanens, et fiat alia $(d)y$, quae sit ad ipsam $(d)x$, ut y ad ${}_1XT$ seu ut dy ad dx; similiterque $(d)v$ quae sit ad $(d)x$ ut v ad ${}_1X\Theta$ seu ut dv ad dx; et $(d)z$ quae sit ad $(d)x$ ut z ad ${}_1X\sqcap$ seu ut dz ad dx eruntque semper $(d)x$, $(d)y$, $(d)v$, $(d)z$ rectae ordinariae seu assignabiles.

Nunc *additio et subtractio* ita fiet: Sit $y - z = v$, fiet $(d)y - (d)z = (d)v$. Quod sic demonstro: $y + dy - z - dz = v + dv$ (si ponamus crescente y crescere etiam z et v, alioqui in decrescentibus, ut z, pro dz poni deberet $- dz$, quod semel noto) ergo abjiciendo aequalia, illinc $y - z$, hinc v, fiet $dy - dz = dv$, adeoque et $dy - dz, : dx = dv : dx$, sed $dy : dx$ et $dz : dx$ et $dv : dx$ aequantur respective, ipsis $(d)y : (d)x$, et $(d)z : (d)x$, et $(d)v : (d)x$. Similiter $(d)z : (d)y$ aut $(d)v : (d)y$ aequantur respective ipsi $dz : dy$ aut $dv : dy$, ergo fiet $(d)y - (d)z, : (d)x = (d)v : (d)x$ adeoque $(d)y - (d)z = (d)v$ quod proponebatur seu $(d)v : (d)y = 1 - (d)z : (d)y$. Quae regula additionis vel subtractionis succedit etiam ex postulato calculi communis, cum ${}_1X$ coincidit ipsi ${}_2X$, seu cum ${}_1YT$ et ${}_1V\Theta$ et ${}_1Z\sqcap$ sunt tangentes curvarum YY, VV, ZZ. Licet autem quantitatibus assignabilibus $(d)y$, $(d)v$, $(d)z$, $(d)x$ etc. possimus esse contenti, cum ita fructum omnem calculi nostri percipiamus, nempe constructionem per quantitates assignabiles, patet tamen hinc fingendo saltem pro illis posse substitui inassignabiles dx, dy per modum fictionis etiam in casu quo evanescunt, quia $dy : dx$ reduci potest semper ad $(d)y : (d)x$ rationem inter quantitates assignabiles seu indubitate reales. Adeoque etiam fieri potest in casu tangentium $dv : dy = 1 - dz : dy$ seu $dv = dy - dz$.

Multiplicatio. Sit $ay = xv$, fiet $a(d)y = x(d)v$ et $v(d)x$. Demonstratio: $ay + ady = x + dx, v + dv = xv + xdv + vdx + dxdv$, et abjiciendo utrinque aequalia ay et xv fiet $ady = xdv + vdx + dx\,dv$, seu $\frac{ady}{dx} = \frac{xdv}{dx} + v + dv$ et transferendo rem ad rectas nunquam evanescentes qua licet, fiet $\frac{a(d)y}{(d)x} = \frac{x(d)v}{(d)x} + v + dv$ ut sola quae evanescere possit, supersit dv, et in casu differentiarum evanescentium, quia $dv = o$, fiet $a(d)y =$

$x(d)v + v(d)x$ ut asserebatur, vel $(d)y : (d)x = x + v, : a$. Unde etiam quia $(d)y : (d)x$ semper $= dy : dx$, licebit hoc fingere in casu dy, dx evanescentium, et facere $dy : dx = x + v, : a$ seu $ady = xdv + vdx$.

Divisio. Sit $z : a = v : x$, fiet $(d)z : a = v(d)x - x(d)v, : xx$. Demonstratio. $z + dz : a = v + dv, :, x + dx$ et sublatis fractionibus $xz + xdz + zdx + dzdx = av + adv$, et utrinque auferendo aequalia xz et av, dividendoque residuum per dx, fiet $adv - xdz, : dx = z + dz$ seu $a(d)v - x(d)z, : (d)x = z + dz$, ita sola, quae evanescere possit superest dz. Et in casu differentiarum evanescentium, seu cum ${}_2X$ incidit in ${}_1X$, tunc ob $dz = 0$, fiet $a(d)v - x(d)z, : (d)x = z = av : x$, unde (ut proponebatur) $(d)z = ax(d)v - av(d)x, : xx$ seu $(d)z : (d)x = (a : x)\ (d)v : (d)x - av : xx$, et quia semper alias $(d)z : (d)x = dz : dv$, licebit hoc etiam fingere in casu evanescentium dz, dv, dx et facere $dz : dv = axdv - avdx, : xx$.

Pro *dignitatibus* sit aequatio $a^{\overline{n-e}}\, x^e = y^n$, fiet $\frac{(d)y}{(d)x} = \frac{e \,.\, x^{\overline{e-1}}}{n \,.\, y^{\overline{n-1}}}$, quod sic paulo fusius quam priora demonstrabo: $a^{n-e}, \frac{1}{1}x^e + \frac{e}{1}x^{\overline{e-1}}\, dx + \frac{e, e-1}{1,2}\, x^{\overline{e-2}}\, dx\, dx + \frac{e, e-1, e-2}{1, 2, 3}\, x^{\overline{e-3}}\, dx\, dx\, dx$ (et ita porro, donec perveniatur usque ad $e - e$ seu 0) aequ. $\frac{1}{1}y^n + \frac{n}{1}\, y^{\overline{n-1}}\, dy + \frac{n, n-1}{1,2}\, y^{\overline{n-2}}\, dy\, dy + \frac{n, n-1, n-2}{1, 2, 3}\, y^{\overline{n-3}}\, dy\, dy\, dy$, (et ita porro donec perveniatur usque ad $n - n$ seu 0) auferatur ab una parte $a^{\overline{n-e}}\, x^e$, ab altera y^n, cum sint aequalia, residuum dividatur per dx et deinde pro $dy : dx$ ratione inter duas quantitates quae continue imminuantur, ponatur aequalis ei ratio $(d)y : (d)x$ seu ratio inter duas quantitates, quarum una $(d)x$ semper eadem permanet, durante imminutione differentiarum seu accessu ipsius ${}_2X$ ad permanens punctum ${}_1X$, fietque

$$\frac{e}{1}x^{\overline{e-1}} + \frac{e, e-1}{1,2}\, x^{\overline{e-2}}\, dx + \frac{e, e-1, e-2}{1, 2, 3}\, x^{\overline{e-3}}\, dx\, dx + \text{etc.} = \frac{n}{1}\, y^{\overline{n-1}} \frac{(d)y}{(d)x} + \frac{n, n-1}{1,2}\, y^{\overline{n-2}} \frac{(d)y}{(d)x}\, dy + \frac{n, n-1, n-2}{1, 2, 3,}\, y^{\overline{n-3}} \frac{(d)y}{(d)x}$$

$dy\, dy$ + etc. Cum ergo (per postulatum) in hac regula generali comprehendatur et casus quo differentiae fiunt nihilo aequales, seu quo puncta ${}_2X$, ${}_2Y$ coincidunt respective ipsis ${}_1X$, ${}_1Y$,

ideo eo casu ponendo dx et $dy = 0$, fiet $\frac{e}{1} x^{\frac{e-1}{\cdot}} = \frac{n}{1} y^{\frac{n-1}{\cdot}}$ $\frac{(d)y}{(d)x}$ caeteris evanescentibus, seu $(d)y : (d)x = e \,.\, x^{\frac{e-1}{\cdot}} : n y^{\frac{n-1}{\cdot}}$ ut ponebatur. Est autem ut explicuimus, ratio $(d)y : (d)x$ eadem quae y seu ${}_1X_2Y$ ordinatae ad ${}_1XT$ subtangentialem, posito T_1Y curvam tangere in Y.

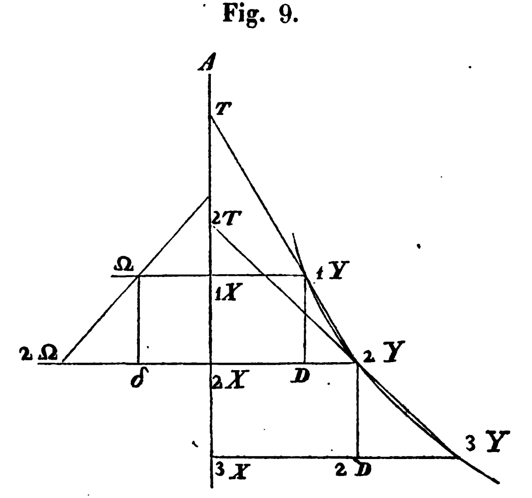
Haec demonstratio locum habet sive dignitates sint potentiae, sive sint radices quarum exponentes sunt fracti. Quanquam etiam liceat ex aequatione tollere exponentes fractos, utrinque exaltando, ut adeo e et n tunc non significent nisi potentias exponentium rationalium, ne opus sit serie progrediente in infinitum. Licebit autem saltem per fictionem modo supra explicato etiam redire ad inassignabiles nempe dy et dx, faciendo ut semper alias ita et in differentiarum evanescentium casu rationem ipsarum dy, dx evanescentium aequalem casui ipsarum $(d)y$, $(d)x$ non evanescentium, quia haec fictio semper ad veritatem indubitabilem reduci potest.

Hactenus demonstratus est Algorithmus differentiarum primi gradus, nunc ostendendum est, eandem methodum valere et pro differentiis differentiarum. Eum in finem assumantur tres ordinatae ${}_1X_1Y$, ${}_2X_2Y$, ${}_3X_3Y$, ex quibus ipsa ${}_1X_1Y$ permaneat eadem, sed ${}_2X_2Y$ et ${}_3X_3Y$ continue ad eam accedant, donec ambae simul in eam incidant, quod fiet si celeritas qua ${}_3X$ accedit ad ${}_1X$ sit ad rationem qua ${}_2X$ accedit ad ${}_1X$ in ratione ${}_1X_3X$ ad ${}_1X_2X$. Assignentur duae rectae, $(d)x$ semper eadem pro quocunque situ ipsius ${}_2X$, et ${}_2(d)x$ semper eadem pro quocunque situ ipsius ${}_3X$ semperque fiat $(d)y$ ad $(d)x$ ut D_2Y ad ${}_1X_2X$ seu ut y (id est ${}_1X_1Y$) ad ${}_1XT$, adeoque $(d)y$ manente $(d)x$ semper mutabitur dum ${}_2X$ accedit ad ${}_1X$, et similiter fiat ${}_2(d)y$ ad ${}_2(d)x$ ut ${}_2D_3Y$ ad ${}_2X_3X$ seu ut $y + dy$ (id est ${}_2X_2Y$) ad ${}_2X_2T$ adeoque ${}_2(d)y$ manente ${}_2(d)x$ semper mutabitur dum ${}_3X$ accedit ad ${}_1X$. Sumatur autem semper $(d)y$ in ipsa recta variante ${}_2X_2Y$, et sit ${}_2X_1\omega$ aequalis ipsi $(d)y$, et similiter sumatur ${}_2(d)y$ in ipsa recta variante ${}_3X_3Y$, et sit ${}_3X_2\omega$ aequalis ipsi ${}_2(d)y$. Ita dum ${}_2X$ et ${}_3X$ continue accedunt ad rectam ${}_1X_1Y$, etiam ${}_2X_1\omega$ et ${}_3X_2\omega$ continue ad eam accedent, et cum ipsis ${}_2X$, ${}_3X$ in eam incident. Porro in ordinata ut ${}_1X_1Y$ notetur punctum quo ${}_1\omega$ continue accedens in ipsam incidit, quod sit Ω, et erit ${}_1X\Omega$ ipsa ultima $(d)y$, quae

est ad $(d)x$ permanentem, ut ordinata ${}_1X_1Y$ ad subtangentialem ${}_1XT$, posito T_1Y curvam YY tangere in ${}_1Y$ quia nempe tunc ${}_1Y$ et ${}_2Y$ coincidunt. Cumque id fieri possit, ubicunque in curva assumatur punctum ${}_1Y$, patet prodituram hoc modo haberi curvam $\Omega\Omega$ quae est differentiatrix curvae YY, uti vicissim curva YY est summatrix curvae $\Omega\Omega$, ut facile ostendi potest.

Eadem methodo demonstratur et calculus pro differentiis differentiarum. Sint tres ordinatae ${}_1X_1Y$, ${}_2X_2Y$, ${}_3X_3Y$, qua-

Fig. 9.



rum valores $y, y+dy, y+dy+ddy$, et distantiae quaecunque ${}_1X_2X$, dx et ${}_2X_3X$, $dx+ddx$, differentiae vero D_2Y, dy et ${}_2D_3Y$, $dy+ddy$. Jam inter $(d)y$ et ${}_2(d)y$ seu inter ${}_1X\Omega$ et ${}_2X_2\Omega$ differentia est $\delta\,{}_2\Omega$, et inter ${}_1X_2X$ et ${}_2X_3X$ differentia est ddx, et fiat $(d)dx$ ad $(d)x$ ut dx ad ${}_2(d)x$, similiterque $(d)dy$ ad $(d)x$ ut ${}_2\Omega\delta$ ad ${}_1X_2X$ seu ${}_1X_1\Omega$ ad ${}_1XT$. Sit jam exempli causa $ay=xv$, fiet $a\,dy = x\,dv + v\,dx + dx\,dv$ per supra ostensa, et similiter $a\,dy + a\,ddy = (x+dx)(dv+ddv) + (v+dv)(dx+ddx) + (dx+ddx)(dv+ddv)$ seu $a\,dy + a\,ddy = x\,dv + x\,ddv + dx\,dv + dx\,ddv + v\,dx + v\,ddx + dv\,dx + dv\,ddx + dx\,dv + dx\,ddv + ddx\,dv + ddx\,ddv$ et tollendo ab una parte $a\,dy$, ab altera $x\,dv + v\,dx + dx\,dv$, restabit utique

$$\frac{ddy}{ddx} = \frac{x\,ddv}{a\,ddx} + \frac{v}{a} + \frac{2\,dx\,dv}{a\,ddx} + \frac{2\,dv}{a} + \frac{2\,dx\,ddv}{a\,ddx} + \frac{ddv}{a}$$